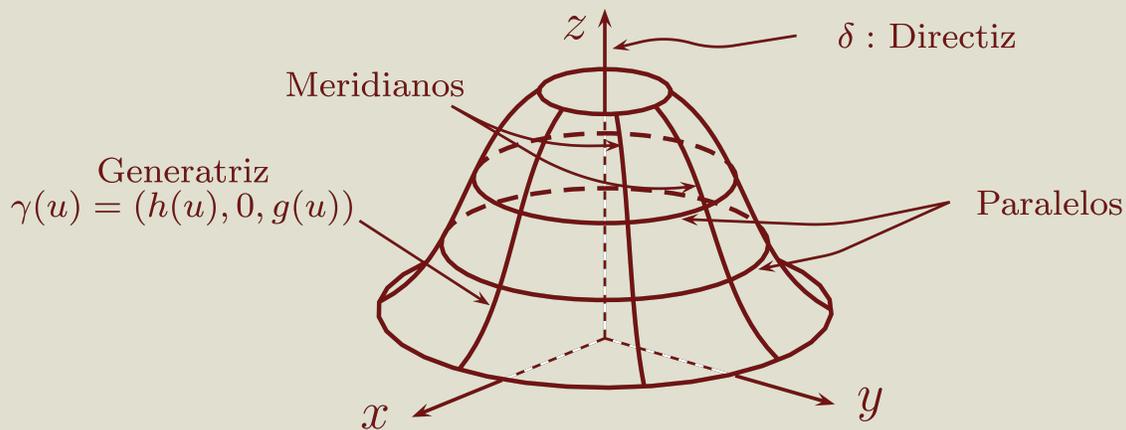

Notas de Cálculo Vectorial

Martín Gildardo García Alvarado
Rodrigo González González



$$A = \iint_D \|(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v)\| \, du \, dv$$



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Notas de cálculo vectorial

Martín Gildardo García Alvarado
Rodrigo González González

Notas de cálculo vectorial

Colección TEXTOS ACADÉMICOS, No. 129

Derechos reservados para esta edición:

D. R. © 2019, Martín Gildardo García Alvarado, Rodrigo González González

D. R. © 2019, Universidad de Sonora

Blvd. Luis Encinas y Rosales s/n, colonia Centro

Hermosillo, Sonora, C. P. 83000

Teléfono (01-662) 213-35-87

www.uson.mx

editorial@unison.mx

ISBN: de la Colección “Textos académicos”: 978-607-518-183-7

ISBN: 978-607-518-328-2

Hecho en México / Made in Mexico

Primera edición: junio 2019

Esta edición de un ejemplar (1.1 MB) fue preparada en el Departamento de Desarrollo y Producción Editorial de la Universidad de Sonora.

Jefe de Producción Editorial: Marco Antonio Soto Román

Diseño de portada: Leonel López Peraza

Formación: Martín Gildardo García Alvarado/Rodrigo González González

Corrección de estilo y galeras: María Teresa Auxiliadora Urquijo Durazo

Esta obra fue dictaminada a doble ciego por pares académicos y aprobada para su publicación por el comité editorial de la Colección “Textos académicos”.

Comité Editorial de la Colección “Textos académicos”:

Mtro. Marco Antonio Soto Román, M.G.P.C. Claudia Carrizosa Martínez, M.C. Mariana Lyubarets,

Dra. Rosario Leticia Domínguez Guedea, Dr. Federico Zayas Pérez, Dr. Daniel González Lomelí y

Dr. Fortino Corral Rodríguez.

Prohibida su reproducción total o parcial por cualquier medio sin autorización escrita de su legítimo titular de derechos.

DIRECTORIO

Dr. Enrique F. Velázquez Contreras

Rector

Dra. Arminda Guadalupe García de León Peñúñuri

Secretaria General Académica

Dra. Rosa María Montesinos Cisneros

Secretaria General Administrativa

Dra. María Rita Plancarte Martínez

Vicerrectora Unidad Regional Centro

M. C. Luis Enrique Riojas Duarte

Vicerrector Unidad Regional Norte

Dra. Adriana Leticia Navarro Verdugo

Vicerrector Unidad Regional Sur

Dr. Rodolfo Basurto Álvarez

Director de Vinculación y Difusión

Marco Antonio Soto Román

Jefe de Producción Editorial

Presentación

Este escrito contiene una propuesta de notas para el curso *Cálculo Diferencial e Integral IV* que se ofrece con carácter de obligatorio para las licenciaturas en Matemáticas y en Física de la División de Ciencias Exactas y Naturales. Dado que este es un curso de cálculo para estudiantes de ciencias, es pertinente que en el material de estudio se incluyan, en la medida de lo posible, las demostraciones de los teoremas básicos.

El primer tema del curso es el relacionado con el teorema del cambio de variables. Es de llamar la atención que en ninguno de los libros citados en la bibliografía básica del temario, se presenta la demostración de la fórmula del cambio de variables. Es más, en algunos (por ejemplo [2]) ni siquiera se trata este tema. Los profesores Marsden y Tromba afirman que “no es fácil demostrar rigurosamente la afirmación de (3)” (fórmula para el cambio de variables para integrales) ([8], p. 368), y se limitan (como lo hacen varios autores) a exponer un argumento intuitivo basado en la idea de cómo se transforman áreas de rectángulos (pequeños) bajo el diferencial de un mapeo. Y tienen razón. Mientras que la demostración de la fórmula en el caso de una variable es casi trivial, en el caso de varias variables es notablemente más complicada, sobre todo porque se requiere de varios conceptos y resultados previos. En concreto, es necesario revisar el concepto de integrales iteradas y el teorema de Fubini, los conceptos de volumen, de conjunto de medida cero y el teorema de Lebesgue, que caracteriza de manera precisa a la clase de funciones Riemann integrables, y, por supuesto, el concepto de integral de en varias variables y sus principales propiedades. Este material ha sido incluido en la primera parte de estas notas, en la que hemos seguido muy de cerca una propuesta hecha por D. Azagra, [1]. Debemos apuntar que en las notas del Profesor Azagra no se hace referencia a fuente bibliográfica alguna (ni libros ni otras páginas web), aunque es claro que el material se encuentra en varios libros sobre el tema, en particular en el cap. IV de [3] (pp. 214-268).

Los autores agradecemos a la Mtra. María Auxiliadora Teresa Urquijo Durazo, del Departamento de Desarrollo y Producción Editorial de la Universidad de Sonora, por su paciente y eficiente trabajo de revisión de este material, y por las múltiples observaciones y sugerencias de edición y de estilo.

Contenido

I	Conceptos de integración	9
1	Integrabilidad en \mathbb{R}^n	11
1.1	Particiones en \mathbb{R}^n	11
1.2	Sumas superiores e inferiores, el concepto de <i>integral</i>	12
1.3	Criterios de integrabilidad	15
1.3.1	Criterio de Riemann	15
1.3.2	Criterio de Darboux	16
1.4	Propiedades de la integral	18
2	Volumen y conjuntos de medida cero	23
2.1	El concepto de <i>volumen</i>	23
2.2	Conjuntos de medida cero	27
2.3	Propiedades adicionales de la integral	29
2.4	El teorema de Lebesgue	33
3	El teorema de Fubini	43
3.1	El caso de dos variables	43
3.2	El caso general	46
4	Integrales impropias	53
II	Cálculo en varias variables	63
5	El teorema del cambio de variables	65
5.1	Demostración de la fórmula del cambio de variables	69
5.2	Coordenadas polares	77
5.3	Coordenadas esféricas	79
5.4	Coordenadas cilíndricas	81
6	Curvas y trayectorias	85
6.1	Representación de curvas	85
6.1.1	Reparametrizaciones	85
6.1.2	Curvas regulares	86

6.2	Función longitud de arco	88
6.3	Integración de campos escalares sobre curvas	94
7	Campos vectoriales	101
7.1	Campos vectoriales, líneas de flujo	101
7.2	Gradiente, divergencia, rotacional	103
7.2.1	Gradiente	103
7.2.2	Divergencia	103
7.2.3	Rotacional	104
7.2.4	Identidades del cálculo vectorial	105
8	Integral de línea de campos vectoriales	109
8.1	Integrales de línea, trabajo	109
8.2	Independencia de la integral de línea bajo reparametrizaciones	111
8.3	Integración de campos gradientes	115
9	Integración sobre superficies	121
9.1	El concepto de superficie	121
9.2	Algunos ejemplos de superficies	123
9.3	El área de una superficie	127
9.4	Integración de campos sobre superficies	129
9.4.1	Integración de campos escalares sobre superficies	129
9.4.2	Integración de campos vectoriales sobre superficies	130
9.5	La divergencia, el rotacional	133
9.5.1	La divergencia de un campo vectorial	133
9.5.2	La fórmula para la divergencia	135
9.5.3	El rotacional de un campo vectorial	137
10	Cálculo de funciones vectoriales	141
10.1	El teorema de Green	141
10.2	El teorema de Stokes	149
10.2.1	La banda de Möbius	152
10.3	El teorema (de la divergencia) de Gauss	154
	Bibliografía	161

Parte I

Conceptos de integración

Capítulo 1

Integrabilidad en \mathbb{R}^n

1.1 Particiones en \mathbb{R}^n

Un *rectángulo especial* R en \mathbb{R}^n es un conjunto de la forma

$$\begin{aligned} R &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Nótese que no todos los rectángulos son especiales en el sentido descrito; por ejemplo, en \mathbb{R}^2 el conjunto $\{(x_1, x_2) : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$ es un rectángulo, pero no es especial.

Definimos el *volumen* $v(R)$ de un rectángulo especial R como el producto de las longitudes de sus lados, $v(R) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$. Si $a_i = b_i$ para alguna i , el rectángulo tiene volumen cero; a veces estos se llaman rectángulos *degenerados*.

Cuando $n = 1$ el volumen de R es su longitud y si $n = 2$ el volumen es el área de R , pero es mejor usar el término *volumen* para referirnos a todas las dimensiones simultáneamente.

Definición 1.1. Una partición P de R es una colección finita de rectángulos especiales, R_1, R_2, \dots, R_N , que no se traslapan cuya unión es R .

Al decir que “no se traslapan” nos referimos a que los *interiores* de estos rectángulos son mutuamente ajenos; no se está requiriendo que los R_j 's sean ajenos.

En la figura 1.1 se muestra una partición del intervalo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

Sin embargo, a cada partición P de R es posible asociar una partición \tilde{P} obtenida mediante el procedimiento de dividir cada intervalo $[a_i, b_i]$ en $m_i + 1$ puntos $r_0^i = a_i < r_1^i < \cdots < r_m^i = b_i$ y formar los $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ subrectángulos especiales

$$R_\alpha = [r_{j_1}^1, r_{j_1+1}^1] \times \cdots \times [r_{j_n}^n, r_{j_n+1}^n],$$

donde $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, con $0 \leq j_i \leq m_i$, y $1 \leq i \leq n$.

En la figura 1.2 se muestra la partición \tilde{P} asociada a la partición P que se muestra en la figura 1.1.

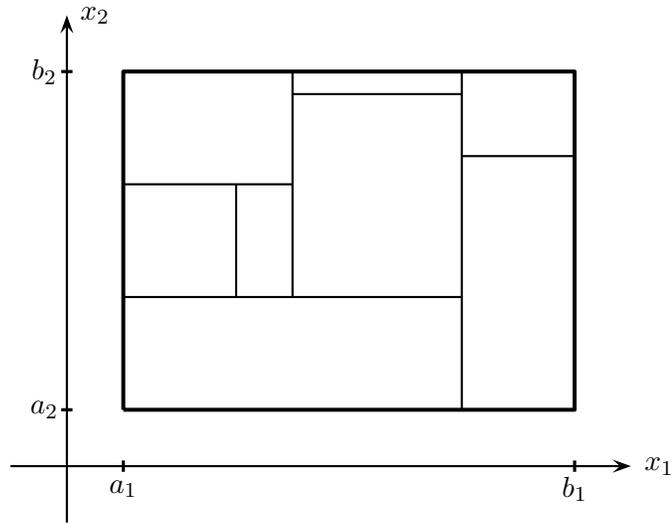


Figura 1.1: Una partición P del rectángulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$

En lo sucesivo, siempre consideraremos particiones de rectángulos obtenidas de esta manera.

La partición P podría definirse como

$$P = P^1 \times \cdots \times P^n := \{I_{j_1}^1 \times \cdots \times I_{j_n}^n : 0 \leq j_k \leq m_k, 1 \leq k \leq n\},$$

donde $I_j^i = [t_j^i, t_{j+1}^i]$, y cada $P^i = \{I_j^i : 0 \leq j \leq m_i\}$ es una partición del lado $[a_i, b_i]$ del rectángulo R .

Observación 1.1. Si P es una partición de un rectángulo R , entonces

$$v(R) = \sum_{Q \in P} v(Q).$$

1.2 Sumas superiores e inferiores, el concepto de *integral*

Sean A un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $b_i - a_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, un rectángulo que contenga a A . Supondremos que f está definida en todo el rectángulo R , haciendo, si es necesario, $f(x) = 0$ para $x \in R \setminus A$.

Como f está acotada en R , podemos considerar el supremo y el ínfimo de f sobre cada subrectángulo Q de una partición P de R , y denotamos

$$m(f, Q) = \inf\{f(x) : x \in Q\}, \quad M(f, Q) = \sup\{f(x) : x \in Q\}.$$

Dada una partición P de R se define la *suma inferior* de f para P como

$$L(f, P) = \sum_{Q \in P} m(f, Q)v(Q),$$

donde la suma se toma sobre todos los subrectángulos Q de la partición P , y análogamente se define

$$U(f, P) = \sum_{Q \in P} M(f, Q)v(Q)$$

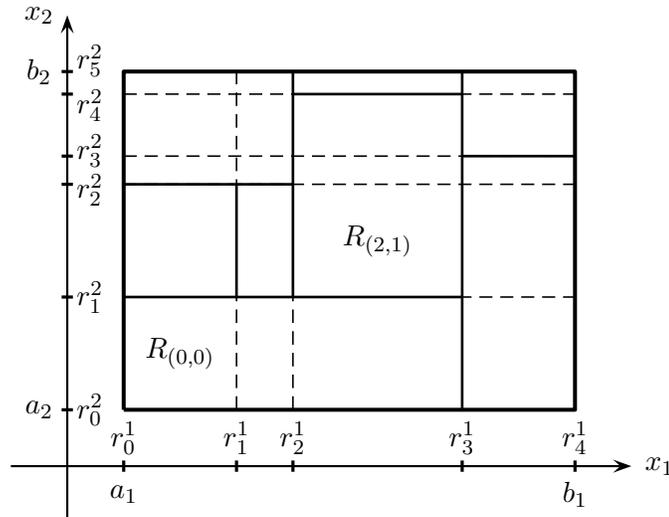


Figura 1.2: La partición \tilde{P} asociada a P

como la *suma superior de f para P* .

Observación 1.2. Para toda partición P se tiene que $L(f, P) \leq U(f, P)$.

Sean P y P' particiones de un rectángulo R . Se dice que P' es *más fina* que P (y escribiremos $P' \prec P$) si cada subrectángulo de P' está contenido en algún subrectángulo de P . Esto equivale a decir que todo subrectángulo de P tiene una partición formada por subrectángulos de P' .

Lema 1.1. Si $P' \prec P$ entonces

$$L(f, P) \leq L(f, P'), \quad \text{mientras que} \quad U(f, P) \leq U(f, P').$$

La demostración del lema 1.1 es inmediata. Basta notar que el ínfimo de f sobre un rectángulo es menor o igual que el ínfimo de f sobre cualquier subrectángulo suyo, y utilizar la observación 1.1. Estos hechos tienen como consecuencia el siguiente:

Lema 1.2. Si P_1 y P_2 son particiones cualesquiera de un rectángulo R , entonces

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2),$$

es decir, cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier otra suma superior.

Demostración. Sean P_1 y P_2 particiones del rectángulo R y supongamos que $P_1 = \bigcup_{\alpha} R_{\alpha}$ y que $P_2 = \bigcup_{\beta} R_{\beta}$. Sea P la partición que se obtiene al intersectar cada rectángulo R_{α} con cada uno de los rectángulos R_{β} . Entonces $P \prec P_1$ y $P \prec P_2$. De acuerdo con los lemas 1.1 y 1.2 se tiene que

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2). \quad \square^1$$

¹El símbolo \square denotará el final de una demostración.

Por tanto, el conjunto de todas las sumas inferiores está acotado superiormente (por $U(f, P_2)$), y tiene un supremo,

$$s = \sup\{L(f, P) : P \text{ partición de } R\}.$$

Análogamente, el conjunto de todas las sumas superiores está acotado inferiormente (por $L(f, P_1)$), luego tiene un ínfimo,

$$S = \inf\{U(f, P) : P \text{ partición de } R\}.$$

Por el lema 1.2, tenemos que $s \leq S$. Al número s se le llama *integral inferior* de f en A y se le denota con $\int_A f$, y a S se le llama *integral superior* de f en A y se le denota con $\int_A f$.

Observación 1.3. Nótese que $\int_A f \leq \int_A f$.

Definición 1.2. Se dice que la función f es integrable (en el sentido de Riemann) si $S = s$, y, en este caso, se define la integral de f sobre A como

$$\int_A f = \sup\{L(f, P) : P \text{ es partición de } R\} = \inf\{U(f, P) : P \text{ es partición de } R\}.$$

Observación 1.4. Si f es integrable en A y P_1 y P_2 son particiones cualesquiera del rectángulo $R \supseteq A$, entonces, por definición,

$$L(f, P_1) \leq \int_A f \leq U(f, P_2).$$

Además, $\int_A f$ es el único número con esta propiedad. Es decir, si $L(f, P_1) \leq \alpha \leq U(f, P_2)$ para cualesquiera particiones P_1 y P_2 de R y f es integrable, entonces $\alpha = \int_A f$.

Notación. Los símbolos $\int_A f(x)dx$, $\int \cdots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ o $\int_A f(x) dv(x)$, se usan con frecuencia para denotar la integral $\int_A f$. El término $dv(x)$ puede interpretarse como un elemento de volumen y, en principio, como se verá en los ejemplos y en los ejercicios, puede representar cualquiera de las $n!$ maneras de multiplicar los símbolos dx_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 , $dv(x)$ puede representar a $dx_1 dx_2$ o a $dx_2 dx_1$.

Si $A = [a, b]$ la integral $\int_A f$ se escribe como $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)dx$.

Observación 1.5. La definición de integral no depende del rectángulo $R \supset A$ considerado. De hecho, si R y R' son rectángulos que contienen a A , entonces

$$\inf\{U(f, P) : P \text{ partición de } R\} = \inf\{U(f, P') : P' \text{ partición de } R'\},$$

y análogamente para la integral inferior.

Ejemplo 1.1. Sea $f(x) = c$ una función constante definida sobre un rectángulo A de \mathbb{R}^n . Entonces f es integrable, y

$$\int_A f = c v(A).$$

Solución. En este caso, $m(f, Q) = M(f, Q) = c$ para cualquier rectángulo Q , por lo que, si P es una cubierta del rectángulo $R \supset A$, $L(P, f) = \sum_{Q \in P} m(f, Q)v(Q) = c \sum_{Q \in P} v(Q) = c \cdot v(R)$ y, por la misma razón, $U(P, f) = c \cdot v(R)$. Entonces, $\sup\{L(f, P) : P \text{ es partición de } R\} = c \cdot v(R)$ y, esto por definición significa que f es integrable y que $\int_A f = c v(A)$. \diamond^2

Ejemplo 1.2. Sea A un rectángulo de \mathbb{R}^2 , y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demuestre que f no es integrable en A .

Solución. Si $R \supset A$ es un rectángulo y Q es un rectángulo de una partición P de R tal que $Q \cap A \neq \emptyset$, entonces $m(f, Q) = 0$ y $M(f, Q) = 1$, por lo que $L(P, f) = 0$ y $U(P, f) = v(R)$.

Entonces $s = \int_A f = 0$ y $S = \int_A f = v(A)$. Como $s < S$, f no es integrable. \diamond

1.3 Criterios de integrabilidad

1.3.1 Criterio de Riemann

Definición 1.3. Diremos que una función f satisface la condición de Riemann en $A \subset \mathbb{R}^n$, A acotado, si para todo rectángulo $R \supset A$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $P = P_\varepsilon$ de R tal que $U(f, P) - L(f, P) \leq \varepsilon$.

Teorema 1.1. (Criterio de integrabilidad de Riemann) Sea A un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n , R un rectángulo que contiene a A , y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (cuyo dominio se extiende a R definiendo $f(x) = 0$ si $x \in R \setminus A$). Entonces, f es integrable si y solo si f satisface la condición de Riemann en A .

Demostración. Supongamos que f es integrable y sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de $\int_A f$ y por las propiedades de los supremos e ínfimos, existen particiones P_1 y P_2 de R tales que

$$U(f, P_1) - \int_A f \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_A f - L(f, P_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

²El símbolo \diamond denotará el final de un ejemplo.

y por tanto, tomando una partición P más fina que P_1 y que P_2 , según el lema 1.1, se tiene

$$U(f, P) - \int_A f \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_A f - L(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sumando ambas desigualdades, obtenemos

$$U(f, P) - L(f, P) \leq \varepsilon.$$

Supongamos ahora que f satisface la condición de Riemann. Sean S y s las integrales superior e inferior de f en A . La desigualdad

$$L(f, P) \leq s \leq S \leq U(f, P)$$

se satisface para toda partición P de R . Dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon$, y por tanto, $S - s \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $S = s$. \square

Corolario 1.1. Sean A un rectángulo de \mathbb{R}^n , y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es integrable en A .

Demostración. Como f es continua en el compacto A , entonces es uniformemente continua. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si la distancia entre dos puntos x y y de A es menor que δ , entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{v(A)}$. Sea P una partición de A en subrectángulos Q_1, Q_2, \dots, Q_N , tal que el máximo de la distancia entre cualesquiera dos vértices de cada subrectángulo Q_j sea menor que δ . Como f es continua, entonces alcanza sus valores supremo e ínfimo en cada uno de los rectángulos Q_j de P ; es decir, para cada $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ existen puntos $s_j, t_j \in Q_j$ tales que $M(f, Q_j) = M_j = f(s_j)$ y $m(f, Q_j) = m_j = f(t_j)$. Como la distancia entre s_j y t_j es menor que δ tenemos que $0 \leq M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{v(A)}$. Se concluye que

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{j=1}^N (M_j - m_j)v(Q_j) < \frac{\varepsilon}{v(A)} \sum_{j=1}^N v(Q_j) = \varepsilon.$$

Entonces f es integrable en A . \square

1.3.2 Criterio de Darboux

La integrabilidad de una función se puede caracterizar en términos del comportamiento de sus *sumas de Riemann*.

Definición 1.4. Diremos que una función f satisface la condición de Darboux en $A \subset \mathbb{R}^n$, A acotado, si para todo rectángulo $R \supset A$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier

partición P de R en subrectángulos Q_1, \dots, Q_N cuyos lados sean menores o iguales que δ , y para cualesquiera $x_1 \in Q_1, \dots, x_N \in Q_N$, se tiene que

$$\left| \sum_{j=1}^N f(x_j)v(Q_j) - I \right| \leq \varepsilon$$

Teorema 1.2. (de Darboux) Sea A un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n , R un rectángulo que contiene a A , y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada (que se extiende a R definiendo $f(x) = 0$ si $x \in R \setminus A$). Entonces, f es integrable en A , con integral I , si y solo si f satisface la condición de Darboux en A .

Al número $\sum_{j=1}^N f(x_j)v(Q_j)$ se le llama suma de Riemann para f asociada a la partición P .

Demostración. Supongamos que f satisface la condición de Darboux. Sean S y s las integrales superior e inferior de f respectivamente. Probaremos que $S = s = I$, o lo que es lo mismo, $I \leq s \leq S \leq I$. Veamos por ejemplo que $S \leq I$ (el caso $I \leq s$ se trata análogamente). Para esto, es suficiente demostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P de R tal que

$$|U(f, P) - I| \leq \varepsilon,$$

y por tanto, $S \leq U(f, P) \leq I + \varepsilon$. Dado $\varepsilon > 0$ fijo, elijamos $\delta > 0$ tal que si P es una partición de R en subrectángulos Q_1, \dots, Q_N cuyos lados son menores o iguales que δ , y $x_1 \in Q_1, \dots, x_N \in Q_N$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^N f(x_i)v(Q_i) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por supuesto, podemos escoger los x_j de modo que

$$|M(f, Q_j) - f(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2Nv(Q)},$$

con lo que tendremos

$$\left| U(f, P) - \sum_{j=1}^N f(x_j)v(Q_j) \right| \leq \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon}{2Nv(Q_j)} = \frac{\varepsilon}{2},$$

y por tanto,

$$|U(f, P) - I| \leq \left| U(f, P) - \sum_{j=1}^N f(x_j)v(Q_j) \right| + \left| \sum_{j=1}^N f(x_j)v(Q_j) - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

que es lo que queríamos probar.

Supongamos ahora que f es integrable y sea $I = \int_A f$. Utilizaremos la propiedad siguiente (ver problema 1.2): dados un rectángulo R de \mathbb{R}^n , una partición P de R y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal

que si P' es cualquier partición de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ , entonces la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P' que no están contenidos en algún subrectángulo de P es menor o igual que ε .

Como f es acotada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in R$. Como f es integrable, existen particiones P_1 y P_2 de R tales que $I - L(f, P_1) \leq \varepsilon/2$ y $U(f, P_2) - I \leq \varepsilon/2$. Sea P una partición más fina que P_1 y que P_2 . Entonces $I - L(f, P) \leq \varepsilon/2$ y $U(f, P) - I \leq \varepsilon/2$. Por la propiedad mencionada antes, existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición P' de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ , entonces la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P' que no están contenidos en algún subrectángulo de P es menor o igual que $\varepsilon/2M$. Sea $P' = \{Q_1, \dots, Q_N\}$ una partición de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ . Denotemos (si es preciso reordenando los subrectángulos de la partición) por Q_1, \dots, Q_K los subrectángulos de P' que están contenidos en algún subrectángulo de P , y sean Q_{K+1}, \dots, Q_N el resto. Entonces, para cualesquiera $x_j \in Q_j, j = 1, \dots, N$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^N f(x_j)v(Q_j) = \sum_{j=1}^K f(x_j)v(Q_j) + \sum_{j=K+1}^N f(x_j)v(Q_j) \leq$$

$$U(f, P) + M \frac{\varepsilon}{2M} = U(f, P) + \frac{\varepsilon}{2} \leq I + \varepsilon.$$

Análogamente se ve que

$$\sum_{j=1}^N f(x_j)v(Q_j) \geq L(f, P) - \frac{\varepsilon}{2} \geq I - \varepsilon.$$

Juntando estas dos desigualdades obtenemos lo que queríamos:

$$\left| \sum_{j=1}^N f(x_j)v(Q_j) - I \right| \leq \varepsilon. \quad \square$$

1.4 Propiedades de la integral

Teorema 1.3. Sean A un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n , $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables y $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

(i) $f + g$ es integrable, y $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$.

(ii) cf es integrable, y $\int_A cf = c \int_A f$.

(iii) Si $f \leq g$, entonces $\int_A f \leq \int_A g$.

(iv) $|f|$ es integrable y $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$.

Observación 1.6. Las propiedades (i) y (ii) del teorema 1.3 establecen que (a) el conjunto de funciones integrables es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma puntual y multiplicación escalar, y que (b) la integral es un operador lineal de este espacio vectorial a \mathbb{R} , es decir, es una funcional lineal.

Demostración del teorema 1.3:

(i) Sea S un rectángulo que contenga a A , y extendamos f y g a S definiendo sus valores como cero fuera de A . Sea $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Darboux 1.2 (p. 17), existe $\delta_1 > 0$ tal que, si P_1 es cualquier partición de S en subrectángulos S_1, \dots, S_N cuyos lados tienen longitud menor o igual que δ_1 , y $x_1 \in S_1, \dots, x_N \in S_N$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^N f(x_i)v(S_i) - \int_A f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Análogamente, existe $\delta_2 > 0$ tal que, si P_2 es cualquier partición de S en subrectángulos R_1, \dots, R_M cuyos lados tienen longitud menor o igual que δ_2 , y $z_1 \in R_1, \dots, z_M \in R_M$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^M f(z_i)v(S_i) - \int_A g \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; entonces, para toda partición de S en subrectángulos T_1, \dots, T_K de lados menores que δ , y para cualesquiera $x_1 \in T_1, \dots, x_K \in T_K$, se tiene que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^K (f(x_i) + g(x_i))v(T_i) - \int_A f - \int_A g \right| \leq \\ & \left| \sum_{i=1}^K f(x_i)v(T_i) - \int_A f \right| + \left| \sum_{i=1}^K g(x_i)v(T_i) - \int_A g \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por el teorema de Darboux se concluye que $f + g$ es integrable en A , y $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$.

(ii) Si $c = 0$ no hay nada que probar. Supongamos que $c \neq 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea S un rectángulo que contenga a A , y extendamos f a S definiendo $f(x) = 0$ si $x \in S \setminus A$. Como f es integrable, por el teorema de Darboux existe $\delta > 0$ tal que si P es una partición de S en subrectángulos S_1, \dots, S_N de lados menores o iguales que δ , y $x_1 \in S_1, \dots, x_N \in S_N$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^N f(x_i)v(S_i) - \int_A f \right| \leq \frac{\varepsilon}{|c|}$$

lo que implica que

$$\left| \sum_{i=1}^N cf(x_i)v(S_i) - c \int_A f \right| \leq \varepsilon.$$

Por el teorema de Darboux, esto prueba que cf es integrable en A , y $\int_A cf = c \int_A f$.

(iii) Sea S un rectángulo que contiene a A , y extendamos f y g a S definiéndolas como 0 en $S \setminus A$ como es habitual. Como $f \leq g$, para toda partición P de S , tenemos que

$$L(g - f, P) \geq 0,$$

luego

$$\sup\{L(g - f, P) : P \text{ partición de } S\} \geq 0$$

es decir, $\int_A (g - f) \geq 0$, y aplicando (i) y (ii) se obtiene $\int_A f \leq \int_A g$.

(iv) Como $|f|$ es continua en todos los puntos que f lo es, tenemos que $\{x : |f| \text{ es discontinua}\} \subseteq \{x : f \text{ es discontinua}\}$, y como este último conjunto tiene medida cero (por ser f integrable y por el teorema de Lebesgue), resulta que el conjunto de discontinuidades de $|f|$ tiene también medida cero, luego $|f|$ es integrable sobre A . Además, por la propiedad (iii), como $-|f| \leq f \leq |f|$, tenemos que

$$-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f|,$$

y por tanto $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$. \square

Ejercicios

1.1. Calcular $\int_0^1 x dx$ directamente a partir de la definición.

1.2. Probar que, dados un rectángulo R de \mathbb{R}^n , una partición P de R y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si P' es cualquier partición de R en subrectángulos cuyos lados son menores o iguales que δ , entonces la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P' que no están contenidos en algún subrectángulo de P es menor o igual que ε .

Sugerencia: tomar $\delta = \varepsilon/T$, donde T es la suma total de las áreas de las caras de todos los subrectángulos de la partición P .

1.3. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrables. Supongamos que $f \geq g$ sobre A . Probar que entonces

$$\int_A f \geq \int_A g.$$

1.4. En particular, si A es un rectángulo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y está acotada superiormente por M e inferiormente por m , entonces

$$m v(A) \leq \int_A f \leq M v(A).$$

1.5. Probar el siguiente teorema (del valor intermedio para integrales): Si A es un rectángulo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\int_A f = f(x_0)v(A).$$

Sugerencia: por el ejercicio 1.4, $f(x_1)v(A) \leq \int_A f \leq f(x_2)v(A)$, donde $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son el mínimo y máximo absolutos de f sobre A . Utilizar entonces que f es continua y A es conexo.

1.6. Sean A un rectángulo, y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es constante salvo quizás en una cantidad finita de puntos. Probar que f es integrable en A , y decir cuál es su integral.

1.7. Sean A un rectángulo de \mathbb{R}^n , y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f \geq 0$ sobre A y que $\int_A f = 0$. Probar que entonces $f = 0$.

1.8. Probar que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente (o decreciente), entonces es integrable en $[a, b]$.

1.9. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Probar que la función producto fg es también integrable en A .

1.10. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Probar que las funciones $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son también integrables en A .

1.11. Sea f una función integrable sobre cualquier intervalo acotado de \mathbb{R} . Definamos $\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$ cuando $a \geq b$. Probar que, para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

Capítulo 2

Volumen y conjuntos de medida cero

En los ejemplos 1.1 y 1.2 (página 15) se presentó un caso que merece analizarse más de cerca. Se trataba de una función ($f(x) = \text{constante}$) que es integrable sobre el cuadrado $R = [0, 1] \times [0, 1]$, pero no lo es sobre un subconjunto de él, a saber, $A = ([0, 1] \times [0, 1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Veremos en este capítulo que esto ocurre cuando la frontera del conjunto es “grande”, en un sentido que se definirá aquí.

Empezaremos definiendo cuándo un conjunto tiene volumen, pero debemos advertir de entrada que es imposible establecer una definición de volumen que sea válida para todo subconjunto de \mathbb{R}^3 (o de \mathbb{R}^n en general). El estudio detallado de estas consideraciones corresponde al área del análisis matemático conocida como teoría de la medida y está más allá de las intenciones de un curso de cálculo. Baste decir por ahora que ninguna teoría de la medida o de la integral puede ser lo suficientemente rica y coherente a la vez para “medir” todos los subconjuntos del espacio \mathbb{R}^n . Solo podrá definirse medida, volumen o integral para determinados conjuntos.

2.1 El concepto de *volumen*

Definición 2.1. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se define la función característica de A , $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

La definición de la integral de Riemann de una función estudiada en el capítulo 1 lleva de modo natural a la siguiente definición de volumen.

Definición 2.2. Se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene volumen si χ_A es integrable; en este caso el volumen de A es el número

$$v(A) = \int_A \chi_A.$$

A veces se dice que A “tiene contenido” en lugar de decir que “tiene volumen”, y de un conjunto con volumen también se dice que es Jordan-medible.

Nótese que, en principio, solo si A es acotado tiene sentido hablar de la integrabilidad de χ_A . Cuando $A \subset \mathbb{R}$, a $v(A)$ se le llama *longitud* de A y cuando A es un subconjunto del plano \mathbb{R}^2 , a $v(A)$ se le llama *área* de A .

Ejemplo 2.1. Sean S y R rectángulos, $S \subset R$. Probar que χ_S es integrable sobre R y que

$$\int_R \chi_S = v(R).$$

Solución. Sean $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $S = [s_1, t_1] \times \cdots \times [s_n, t_n]$, donde $a_j \leq s_j \leq t_j \leq b_j$ para cada $j = 1, 2, \dots, n$. Dado $\varepsilon > 0$, formamos una partición P de R de la manera siguiente: para cada j partimos el intervalo a_j, b_j con los puntos $\{a_j, u_j, s_j, t_j, v_j, b_j\}$ donde $a_j \leq u_j \leq s_j \leq t_j \leq v_j \leq b_j$, tales que si A es el rectángulo

$$A = [u_1, v_1] \times \cdots \times [u_n, v_n],$$

entonces $v(A) < v(S) + \varepsilon$. En la figura 2.1 intentamos ilustrar esta construcción para el caso $n = 2$.

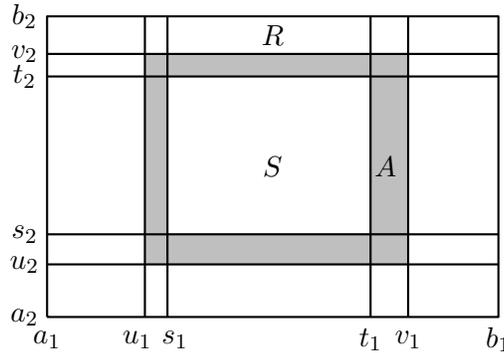


Figura 2.1: El volumen sombreado debe ser $< \varepsilon$

El sup de χ_S en un subrectángulo dado R_j es 1 si $R_j \cap S \neq \emptyset$ y 0 en caso contrario. El inf de χ_S en R_j es 1 si $R_j \subset S$ y 0 en caso contrario. Hay un único subrectángulo de esta partición que está contenido en S , es S mismo; entonces

$$L(\chi_S, P) = v(S).$$

La unión de los subrectángulos R_j que intersectan a S es A . Por tanto

$$U(\chi_S, P) = v(A).$$

Como $v(S) < v(A) < v(S) + \varepsilon$, tenemos que $v(A) - v(S) < \varepsilon$. Entonces

$$U(\chi_S, P) - L(\chi_S, P) < \varepsilon.$$

Por el criterio de Riemann (teorema 1.1, p. 15) χ_S es integrable en R . La integral $\int_R \chi_S$ difiere de $L(\chi_S, P) = v(S)$ en menos que ε . Por tanto, $\int_R \chi_S = v(S)$. \diamond

Definición 2.3. Si A tiene volumen y $v(A) = 0$ se dice que A tiene volumen cero (o contenido cero).

Proposición 2.1. Un conjunto A tiene volumen cero si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento finito de A por rectángulos Q_1, \dots, Q_m tales que $\sum_{j=1}^m v(Q_j) \leq \varepsilon$.

Demostración. Supongamos que $v(A) = 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea R un rectángulo, $R \supset A$. Por definición de integral, existe una partición P de R en subrectángulos S_1, \dots, S_M , tal que $U(\chi_A, P) \leq \varepsilon$. Si denotamos por P_0 la colección de todos los subrectángulos S_j cuya intersección con A es no vacía, se tiene que $U(\chi_A, P) = \sum_{Q \in P_0} v(Q)$, y debe ser claro que P_0 es un recubrimiento finito de A por rectángulos cuyos volúmenes suman menos que ε .

Supongamos ahora que para $\varepsilon > 0$ dado existe un recubrimiento de A por rectángulos cuyos volúmenes suman menos que ε . Sean V_1, \dots, V_M estos rectángulos. Para cada $j = 1, \dots, M$ elegimos un rectángulo \tilde{V}_j tal que $V_j \subset \text{int}(\tilde{V}_j)$ y $v(\tilde{V}_j) \leq v(V_j) + \varepsilon/2^j$ (de modo que $\sum_{j=1}^M v(\tilde{V}_j) \leq 2\varepsilon$).

Sean ahora R un rectángulo que contenga a A , y P una partición de R en subrectángulos Q , tales que cada Q o bien está contenido en uno de los \tilde{V}_i , o bien se corta sólo en la frontera con algunos de los \tilde{V}_i (esta partición P puede definirse utilizando todos los lados de los \tilde{V}_i). Entonces

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^M \tilde{V}_j = \bigcup \{Q : Q \subseteq \tilde{V}_j \text{ para algún } j\},$$

y

$$U(\chi_A, P) = \sum_{Q \in P: Q \cap A \neq \emptyset} v(Q) \leq \sum_{Q \in P: \exists j: Q \subseteq \tilde{V}_j} v(Q) = \sum_{i=1}^M v(\tilde{V}_i) \leq 2\varepsilon.$$

Esto prueba que $\inf\{U(\chi_A, P_0) : P_0 \text{ partición de } R\} \leq 0$; es decir, la integral superior de χ_A es menor o igual que cero, y como por otra parte la integral inferior de χ_A es obviamente no negativa (puesto que $\chi_A \geq 0$), resulta que las integrales inferior y superior han de ser ambas iguales a cero. Es decir, χ_A es integrable y su integral es cero, lo cual equivale a decir que A tiene volumen y $v(A) = 0$. \square

El ejemplo siguiente, interesante por sí mismo, se usa con frecuencia para demostrar otros resultados.

Ejemplo 2.2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Demostrar que su gráfica $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ tiene volumen cero en \mathbb{R}^2 . Después, generalizar este resultado para funciones continuas sobre rectángulos de \mathbb{R}^n .

Solución. Como $[a, b]$ es compacto, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$. Para $\varepsilon > 0$ dado, sea $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ si $|x - y| < \delta$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\delta > b - a$. Sea $h = \frac{b-a}{N}$

y definamos $x_j = a + jh$ para $j = 0, 1, \dots, N$. Como $h < \delta$ tenemos que

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Ahora definimos los rectángulos

$$R_k = [x_{k-1}, x_k] \times \left[\min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right], \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Nótese que $v(R_k) < \frac{h\varepsilon}{b-a}$ y que $G(f) \subset \bigcup_{k=1}^N R_k$. Entonces, $\sum_{k=1}^N v(R_k) < \frac{Nh\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$.

En el caso general, supongamos que A es un conjunto compacto en \mathbb{R}^{n-1} y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sea $G(f) = \{(x, f(x)), x \in A\}$ la gráfica de f . Como A es compacto, podemos escoger un rectángulo R en \mathbb{R}^{n-1} tal que $A \subset R$. Sea $w = v(R)$, el volumen de \mathbb{R} . Como A es compacto y f es continua, entonces f es uniformemente continua en A . Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sea P una partición de R tal que el diámetro de cada subrectángulo de la partición es menor que δ . Sean R_1, R_2, \dots, R_N aquellos subrectángulos de P que tienen intersección no vacía con A , y sean

$$m_j = \min\{f(x), x \in A \cap R_j\}, \quad M_j = \max\{f(x), x \in A \cap R_j\}.$$

Entonces $G(f) \subset \bigcup_j [R_j \times [m_j, M_j]]$. La suma de los volúmenes de los rectángulos $R_j \times [m_j, M_j]$ es

$$\sum_{j=1}^N v(R_j)(M_j - m_j) \leq \frac{\varepsilon}{w} \sum_{j=1}^N v(R_j) \leq \frac{\varepsilon}{w} w = \varepsilon.$$

Por la proposición 2.1 (p. 25), se concluye que la gráfica $G(f)$ de f es un conjunto de volumen cero. \diamond

Ejemplo 2.3. *Demostrar que la frontera de un rectángulo tiene volumen cero.*

Solución. Podemos proceder a partir de la definición de conjunto de volumen cero. Sea R el rectángulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ y sea $h = \min\{b_j - a_j, j = 1, 2, \dots, n\}$. La frontera de R , que denotaremos ∂R , consiste de las 2^n caras de R , una de las cuales es $C_1 = \{a_1\} \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Para $\varepsilon > 0$ el rectángulo $R_1 = \left[a_1 - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_1 + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ contiene a C_1 y $v(R_1) = \frac{\varepsilon}{2^n} \frac{v(R)}{b_1 - a_1} \leq \varepsilon \frac{v(R)}{h2^n}$. Procediendo de manera similar con las otras caras de ∂R , concluimos,

usando la proposición 2.1, que $v(\partial R) \leq \varepsilon \frac{v(R)}{h}$.

Pero también podemos resolver el problema usando el ejemplo 2.2, pues cada cara de un rectángulo es la gráfica de una función continua de la forma $x_k = a_k$ (a_k constante) para $k = 1, 2, \dots$. Entonces, por el ejemplo 2.2 cada una de las caras de un rectángulo tiene volumen cero, y la frontera del rectángulo, que es la unión de una cantidad finita de conjuntos de volumen cero, tiene volumen cero. \diamond

2.2 Conjuntos de medida cero

Muchas veces es útil poder considerar recubrimientos numerables (y no solo finitos) por rectángulos. Esta idea da lugar a la definición de *conjunto de medida cero*, que en general no equivale a la *conjunto de volumen cero*; sin embargo está estrechamente relacionada con ella. Por ejemplo, se verá (en el corolario 2.1, p. 37) que un conjunto A tiene volumen si y solo si su frontera tiene medida cero.

Definición 2.4. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que tiene medida cero si para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia numerable de rectángulos Q_1, Q_2, \dots tales que*

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) < \varepsilon.$$

Observación 2.1. *Estas definiciones dependen (de la dimensión) del espacio en el que se trabaja. Por ejemplo, la recta real, considerada como un subconjunto del plano \mathbb{R}^2 , tiene medida cero. De hecho consideremos, sin pérdida de generalidad, la recta $x_2 = 0$. Si para cada $j = 0, 1, 2, \dots$ consideramos el rectángulo $Q_j = [j, j+1] \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^{j+3}}, \frac{\varepsilon}{2^{j+3}}\right]$, entonces la semirrecta $x_1 \geq 0, x_2 = 0$ está*

contenida en $\bigcup_{j=0}^{\infty} Q_j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} v(Q_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} = \frac{\varepsilon}{2}$. De manera similar podemos cubrir la semirrecta

$x_1 \leq 0, x_2 = 0$ con una cantidad numerable de rectángulos cuyas áreas suman $\frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, para $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una familia numerable de rectángulos que cubren la recta $x_2 = 0$ y cuyo volumen total es menor que ε . Sin embargo, como subconjunto de \mathbb{R} la recta no tiene esta propiedad. No demostraremos aquí esta afirmación porque se necesitaría exponer una parte sustancial de la teoría de la medida. Para nuestros propósitos solo se necesita el concepto de medida cero establecido en la definición 2.4.

Observación 2.2. *Todo conjunto de volumen cero tiene medida cero. El recíproco no es cierto, puesto que hay conjuntos de medida cero que no tienen volumen. Por ejemplo, $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ tiene medida cero (todo conjunto numerable tiene medida cero), y sin embargo no tiene volumen (su función característica no es integrable Riemann). No obstante, si A tiene volumen, entonces su volumen es cero si y sólo si tiene medida cero (ver ejercicio 2.9, p. 31). También es fácil ver que si A es compacto entonces A tiene medida cero si y solo si tiene volumen cero (ejercicio 2.8, p. 31).*

Observación 2.3. *Si A tiene medida cero y $B \subseteq A$, entonces B tiene también medida cero.*

Debe ser claro que la unión finita de conjuntos de volumen cero tiene volumen cero. Una de las principales ventajas de poder considerar conjuntos de medida cero es que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene también medida cero (lo que no es cierto de los conjuntos de volumen cero, como prueba el ejemplo de la observación 2.2):

Teorema 2.1. *Sean $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos de medida cero en \mathbb{R}^n . Entonces su unión $A = \bigcup A_j$ tiene medida cero.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como cada A_i tiene medida cero, existe un recubrimiento numerable de A_i por rectángulos B_{ij} , $j \in \mathbb{N}$, tales que

$$\sum_{j=1}^{\infty} v(B_{ij}) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Entonces la colección numerable de rectángulos formada por todos los B_{ij} , $i, j \in \mathbb{N}$ recubre la unión $A = \bigcup A_j$, y las sumas de los volúmenes de todos los rectángulos B_{ij} es menor o igual que ε , ya que

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} v(B_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} v(B_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon. \quad \square$$

Ejemplo 2.4. *Demostrar que un rectángulo en \mathbb{R}^n no tiene medida cero. Concluir que si A tiene medida cero, entonces A tiene interior vacío. El recíproco no es cierto, ver el ejercicio 2.11, p. 32.*

Solución. Sea Q un rectángulo y supongamos que Q tiene medida cero. Sea $\varepsilon < v(Q)$. Entonces existe una colección numerable de rectángulos Q_1, Q_2, \dots , tales que el volumen total es menor que ε y tales que Q está contenido en la unión $\text{int}Q_1, \text{int}Q_2, \dots$. Como Q es compacto, el teorema de Heine-Borel implica que existe una colección finita de tales rectángulos tal que (cambiando los

subíndices si es necesario) $Q \subset \bigcup_{j=1}^N Q_j$. Pero de aquí se sigue que

$$v(Q) \leq \sum_{j=1}^N v(Q_j) < \varepsilon < v(Q).$$

Pero esto es una contradicción.

Supongamos ahora que el interior de A es no vacío y sea $p \in \text{int}A$. Existe un $r > 0$ tal que la bola $B_r(p)$ con centro en p y radio r está contenida en A . Consideremos el rectángulo (cubo, en este caso) Q con centro en p y tal que la longitud de cada uno de sus lados sea menor ε/\sqrt{n} . Entonces Q no tiene medida cero y como $Q \subset A$ entonces A no tiene medida cero. \diamond

Ejemplo 2.5. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitziana, es decir, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todos $x, y \in A$. Probar que si $E \subset A$ tiene medida cero (respectivamente, contenido cero), entonces $f(E)$ también tiene medida cero (resp., contenido cero).*

Solución. Nótese que en la definición de conjunto de medida cero (definición 2.4, p. 27), es posible considerar cubiertas con cubos, en lugar de cubiertas con rectángulos. Si E es un conjunto con diámetro $L = \sup\{|x - y|, x, y \in E\}$, el diámetro de $f(E)$ no excede ML y el conjunto $f(E)$ puede ser cubierto con cubos de lado de longitud LM y volumen $(LM)^n$. Así, si E es cubo con aristas de tamaño δ (volumen $v(E) = \delta^n$), entonces su imagen $f(E)$ está contenida en un cubo cuyo volumen no excede $(M\sqrt{n}\delta)^n$. De aquí se sigue que si $E \subset A$ tiene medida cero (respectivamente, contenido cero), entonces $f(E)$ también tiene medida cero (resp., contenido cero). \diamond

2.3 Propiedades adicionales de la integral

Teorema 2.2. *Sea A un subconjunto acotado y de medida cero de \mathbb{R}^n , y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces*

$$\int_A f = 0.$$

Demostración. Sea S un rectángulo que contenga a A , y extendamos f a S poniendo $f(x) = 0$ para $x \in S \setminus A$. Sea P una partición cualquiera de S en subrectángulos S_1, \dots, S_N , y sea M una cota superior de f en A . Entonces se tiene

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^N m(f, S_i)v(S_i) \leq M \sum_{i=1}^N m(\chi_A, S_i)v(S_i).$$

Supongamos que $m(\chi_A, S_i) \neq 0$ para algún i ; entonces $S_i \subseteq A$; pero esto es imposible, pues ningún conjunto de medida cero puede contener un rectángulo (ver ejercicio 2.4). Por tanto, $m(\chi_A, S_i) = 0$

para todo i , y en particular $\sum_{i=1}^N m(\chi_A, S_i)v(S_i) = 0$, lo que según la desigualdad anterior implica que $L(f, P) \leq 0$.

Por otra parte, como $M(f, S_i) = m(f, S_i)$, se tiene que

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^N M(f, S_i)v(S_i) = - \sum_{i=1}^N m(-f, S_i)v(S_i) = -L(-f, P);$$

pero por la misma razón que antes, $L(-f, P) \leq 0$, luego $-L(-f, P) = U(f, P) \geq 0$. Así, hemos probado que, para toda partición P de S ,

$$L(f, P) \leq 0 \leq U(f, P)$$

y, como f es integrable, esto significa que $\int_A f = 0$. \square

Teorema 2.3. *Sean A un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n , $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables, $c \in \mathbb{R}$. Entonces:*

(i) Si A tiene volumen, y $|f| \leq M$, entonces $\left| \int_A f \right| \leq Mv(A)$.

(ii) Si f es continua, A tiene volumen y es compacto y conexo, entonces existe $x_0 \in A$ tal que $\int_A f(x)dx = f(x_0)v(A)$.

(iii) Sean A, B conjuntos acotados de \mathbb{R}^n , y sea $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que las restricciones de f a A , B y a $A \cap B$ son integrables. Entonces f es integrable, y

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f.$$

(iv) Sean A, B conjuntos acotados de \mathbb{R}^n , y sea $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f es integrable en $A \cup B$, y que tanto A como B tienen volumen. Entonces las restricciones de f a A , B y $A \cap B$ son integrables, y

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f.$$

En particular, en cualquiera de los casos (iii) y (iv) anteriores, si $A \cap B$ tiene medida cero, entonces

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Demostración.

(i) Si $|f| \leq M$ sobre A , entonces la extensión canónica de $|f|$ a un rectángulo S que contenga a A seguirá verificando $|f| \leq M\chi_A$, luego, usando (iii) y (ii), del teorema 1.3 (p. 18) se tiene

$$\int_A |f| \leq \int_A M\chi_A = M \int_A \chi_A = Mv(A),$$

y entonces, por (iv), del teorema 1.3 (p. 18)

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \leq Mv(A).$$

(ii) Puede suponerse $v(A) \neq 0$ (en otro caso el resultado es consecuencia del teorema 2.2) (p. 29). Sean $m = \inf\{f(x) : x \in A\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in A\}$. Como A es compacto y f es continua, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $m = f(x_1)$ y $M = f(x_2)$. Sea

$$\lambda = \frac{1}{v(A)} \int_A f.$$

Entonces, por la propiedad (iii) del teorema 1.3 (p. 18), $m = f(x_1) \leq \lambda \leq M = f(x_2)$, y como f es continua y A es conexo, existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = \lambda$, es decir, $\int_A f = f(x_0)v(A)$.

(iii) Sean $f = f\chi_{A \cup B}$, $f_1 = f\chi_A$, $f_2 = f\chi_B$ y $f_3 = f\chi_{A \cap B}$ las extensiones canónicas de f , $f|_A$, $f|_B$ y $f|_{A \cap B}$ a un rectángulo que contenga a $A \cup B$. Es inmediato comprobar que $f = f_1 + f_2 - f_3$, y debe ser claro, por la definición, que $\int_{A \cup B} f\chi_A = \int_A f$, etc. Entonces, por (i) y (ii) del teorema 1.3 (p. 18):

$$\begin{aligned} \int_{A \cup B} f &= \int_{A \cup B} f_1 + \int_{A \cup B} f_2 - \int_{A \cup B} f_3 \\ &= \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f \end{aligned}$$

En el caso en que $A \cap B$ tenga medida cero, el teorema 2.2 (p. 29) nos dice que $\int_{A \cap B} f = 0$, y entonces $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

(iv) Basta observar que las discontinuidades de las extensiones canónicas a R de las restricciones de f a los conjuntos A, B y $A \cap B$ están contenidas en la unión de las discontinuidades de f con las fronteras de A y B , y por las presentes hipótesis estos tres conjuntos tienen medida cero; esto muestra que dichas restricciones son integrables. La identidad de las integrales se sigue entonces aplicando (iii). \square

Observación 2.4. *A la propiedad (ii) del teorema 2.3 se le conoce como teorema del valor medio para la integral.*

Observación 2.5. *Con un poco más de cuidado puede probarse que en la parte (ii) del teorema 2.3 no hace falta suponer A compacto; ver el ejercicio 2.23.*

Ejercicios

2.1. *Probar que si E_1, \dots, E_k tienen volumen cero en \mathbb{R}^n , entonces $\bigcup_{j=1}^k E_j$ también tiene volumen cero.*

2.2. *Demostrar que si E tiene volumen cero en \mathbb{R}^n , entonces su cerradura \overline{E} también lo tiene.*

2.3. *Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero. ¿Es cierto que su cerradura también tiene medida cero?*

2.4. *Demostrar que en la definición de volumen cero y de medida cero pueden sustituirse los rectángulos cerrados por rectángulos abiertos.*

2.5. *Demostrar también que pueden sustituirse los rectángulos por cubos en la definición de volumen cero y medida cero.*

2.6. *Probar que la recta real, considerada como subconjunto del plano \mathbb{R}^2 , tiene medida cero.*

2.7. *Probar que si A es un conjunto con volumen y $v(A) > 0$, entonces A tiene interior no vacío.*

2.8. *Probar que si A es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , entonces A tiene medida cero si y solo si tiene volumen cero.*

2.9. *Demostrar que si A tiene volumen entonces su volumen es cero si y solo si A tiene medida cero.*

Sea $C_0 = [0, 1]$. Partimos C_0 en tres subintervalos de longitud $1/3$, removemos el tercio medio, $(1/3, 2/3)$ y llamamos C_1 al conjunto que resulta: $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Cada uno de los dos subintervalos que componen C_1 se divide en tres partes iguales, se remueve el tercio medio de cada uno y llamamos C_2 al conjunto que resulta: $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Continuando de esta manera construimos una sucesión de conjuntos $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ tales que C_n es la unión de 2^n subintervalos cerrados ajenos cada uno de longitud 3^{-n} . El *conjunto de Cantor* es el conjunto $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

2.10. Probar que C tiene medida cero. Por tanto, existen conjuntos no numerables que tienen medida cero.

2.11. Existen compactos cuyo interior es vacío y que no tienen medida cero.

De hecho, puede encontrarse un subconjunto compacto K del intervalo $[0, 1]$ con esta propiedad. En particular K no tiene volumen, ya que todo conjunto con volumen cuyo interior sea vacío debe tener volumen cero.

Sugerencia: modificar apropiadamente la construcción del conjunto de Cantor (por ejemplo, dividir el intervalo unidad en cinco partes y quitar la de en medio; dividir ahora en $5^2 = 25$ partes cada uno de los dos intervalos adyacentes al excluido, y eliminar la de en medio. En cada paso multiplicar por cinco las subdivisiones del paso anterior y quitar el intervalo que queda en medio de cada uno de los conservados en el paso precedente. Continuar el proceso indefinidamente).

2.12. Existen abiertos que no tienen volumen. Utilizando el ejercicio 2.11, encontrar un subconjunto abierto del intervalo $(0, 1)$ que no tenga volumen. Ver también el ejercicio 2.40

2.13. Demostrar que toda recta en \mathbb{R}^2 y todo plano en \mathbb{R}^3 tienen medida cero.

2.14. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que su gráfica $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$.

Sugerencia: utilizar el ejemplo 2.2 (p. 25).

2.15. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1 . Probar que la imagen de γ tiene volumen cero.

2.16. Demostrar que si A y B tienen volumen, entonces $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \setminus B$ también tienen volumen.

Sugerencia: usar los problemas anteriores y el hecho de que

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B \quad \text{y} \quad \chi_{A \setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B).$$

2.17. Sean A_1, A_2, \dots una familia numerable de conjuntos con volumen. ¿Es cierto que su unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ también tiene volumen?

2.18. Sean A y B conjuntos con volumen tales que $A \cap B$ tiene volumen cero. Probar que

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B).$$

2.19. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $v(A) > 0$ y que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in A$. Demostrar que $\int_A f < \int_A g$.

Sugerencia: utilizar el teorema 2.5.

2.20. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \setminus C$, donde C es un subconjunto de A que tiene medida cero. Probar que entonces $\int_A f = \int_A g$.

2.21. Sean $f(x, y) = e^{\sin(x+y)}$, $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Probar que

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_D f(x, y) \, dx \, dy \leq e.$$

2.22. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida sobre un conjunto abierto A ; para cada $\varepsilon > 0$ sea B_ε la bola cerrada de radio ε centrada en un punto $x_0 \in A$. Probar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{v(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} f(x) dx = f(x_0).$$

2.23. Probar que en el teorema del valor medio integral (teorema 2.3(ii)) no hace falta suponer que A sea compacto.

Sugerencia: sean $m = \inf\{f(x) : x \in A\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in A\}$, $\lambda = (\int_A f)/v(A)$. Se tiene $m \leq \lambda \leq M$, pero en general no existirán $x_1, x_2 \in A$ tales que $m = f(x_1)$ y $M = f(x_2)$, y hay que considerar los casos $\lambda = M$, $\lambda = m$, y $m < \lambda < M$ separadamente. Para el caso $m < \lambda < M$ un razonamiento parecido al de la demostración de 4.1(vi) sirve. Para los dos primeros casos, puede usarse el teorema 2.5.

2.24. Si $A \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_N$, donde todos los conjuntos tienen volumen, probar que $v(A) \leq \sum_{i=1}^N v(A_i)$.

2.25. Probar que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, donde A es un conjunto abierto con volumen, y $\int_B f = 0$ para cada $B \subseteq A$ con volumen, entonces $f = 0$.

2.26. Sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, $f \geq 0$. Si $A \subseteq B$ y f es integrable en A , entonces $\int_A f \leq \int_B f$. ¿Es esto cierto si no se supone $f \geq 0$?

2.27. Sean $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables definidas sobre un rectángulo S de \mathbb{R}^n . Sea D un subconjunto denso de S , y supongamos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$. Probar que $\int_S f \leq \int_S g$.

2.28. Deducir del ejercicio 2.27 que si $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables definidas sobre un rectángulo S de \mathbb{R}^n y D es un subconjunto denso de S , de modo que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, entonces $\int_S f = \int_S g$.

2.4 El teorema de Lebesgue

Hay dos preguntas fundamentales en el tema que venimos estudiando:

1. ¿exactamente, qué funciones son integrables? y
2. ¿qué tan grande puede ser la frontera de un conjunto para que este tenga volumen?

Las respuestas (de H. Lebesgue) a estas preguntas están formuladas en el teorema 2.4 y en el corolario 2.1, que son la parte central de este capítulo. Con estos resultados, y al enfatizar la importancia del concepto de medida cero, Lebesgue abrió el camino para el desarrollo de la teoría de la medida y de una teoría de integración más general que la de Riemann. La teoría de la medida y la integral de Lebesgue son objeto de estudio en cursos más avanzados en análisis matemático.

La demostración que aquí expondremos del teorema de Lebesgue utiliza el concepto de oscilación de una función en un punto.

Definición 2.5. Sea $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto W de \mathbb{R}^n . Si para cada vecindad U de x_0 definimos

$$\omega(f, U) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in U\},$$

entonces la oscilación de f en x_0 es

$$\omega_f(x_0) = \inf\{\omega(f, U) : U \text{ es una vecindad de } x_0\}.$$

Nótese que $\omega_f(x_0) \geq 0$.

Observación 2.6. Por las propiedades del supremo se ve que si $U \subseteq V$ entonces $\omega(f, U) \leq \omega(f, V)$, y, en consecuencia, si $x \in U$, entonces $\omega_f(x) < \omega(f, U)$.

Lema 2.1. Sea $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto W de \mathbb{R}^n , y sea $x_0 \in W$. Entonces, f es continua en x_0 si y solo si $\omega_f(x_0) = 0$.

Demostración. Supongamos que $\omega_f(x_0) = 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe entonces una vecindad U de x_0 tal que $\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in U\} < \varepsilon$, por lo que si $x, y \in U$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Así, para cualquier $x \in U$ se tiene $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, pues $x_0 \in U$. Por definición esto significa que f es continua en x_0 .

Supongamos ahora que f es continua en x_0 y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe una vecindad U de x_0 tal que para toda $x \in U \cap W$ se tiene $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $x_1, x_2 \in U \cap W$ tendremos $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Así que $\sup\{|f(x_1) - f(x_2)|, x_1, x_2 \in U \cap W\} < \varepsilon$ y, como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $\omega_f(x_0) = 0$. \square

Lema 2.2. Sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida en un rectángulo $B \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $\alpha > 0$, el conjunto $G = \{x \in B : \omega_f(x) < \alpha\}$ es abierto en B .

Demostración. Sea $c \in G$. Entonces $\omega_f(c) < \alpha$. Por definición, existe una vecindad V de c tal que $\omega(f, V \cap B) < \alpha$. Si $x \in V \cap B$ y U es una vecindad de x contenida en V , entonces $\omega(f, U) < \alpha$. Entonces, $\omega_f(x) < \omega(f, U) < \alpha$ (por la observación 2.6). De manera que G es abierto en B . \square

Consecuencia inmediata del lema 2.2 es que el conjunto $A = \{x \in B : \omega_f(x) \geq \alpha\} = G^c$ es cerrado y, al estar contenido en B , es acotado; por tanto A es compacto.

Definición 2.6. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $B \supset A$. Llamaremos extensión canónica de f a B (o simplemente extensión de f a B) a la función $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in B \setminus A \end{cases}$.

Teorema 2.4. (de Lebesgue, o criterio de Lebesgue para la integrabilidad de Riemann) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Sea g la extensión de f a todo \mathbb{R}^n . Entonces, f es Riemann integrable si y solo si los puntos en los cuales la extensión g es discontinua forman un conjunto de medida cero.

Demostración. Sea B un rectángulo que contenga a A .

(\implies) Supongamos que g es integrable. Sea $D = \{x : g \text{ es discontinua en } x\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $D_{1/n} = \{x \in B : \omega_g(x) \geq 1/n\}$. Nótese que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}$. Puesto que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero (teorema 2.1, página 27), bastará probar que cada uno de estos conjuntos tiene medida cero. Para esto, fijemos $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, como g es integrable, existe una partición P de B tal que

$$U(g, P) - L(g, P) = \sum_{S \in P} (M(g, S) - m(g, S))v(S) < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Nótese que $D_{1/n} = E_1 \cup E_2$, donde

$$E_1 = \{x \in D_{1/n} : \exists S \in P : x \in \partial S\},$$

y

$$E_2 = \{x \in D_{1/n} : \exists S \in P : x \in \text{int}(S)\};$$

aquí $\text{int}(S)$ denota el *interior* del rectángulo S . La frontera de un rectángulo tiene volumen cero (ejemplo 2.3, p. 26), y como E_1 está contenido en una unión finita de fronteras de rectángulos, se deduce que E_1 tiene volumen cero; por tanto, existe una colección de rectángulos C_1 tales que $E_1 \subseteq \bigcup_{R \in C_1} R$ y $\sum_{R \in C_1} v(R) < \varepsilon/2$. Por otra parte, sea C_2 el conjunto de los subrectángulos de P que tienen en su interior algún elemento de $D_{1/n}$ (de E_2 para ser más precisos). Entonces, si $S \in C_2$, existe $z_s \in \text{int}(S)$ tal que $z_s \in D_{1/n}$, y por tanto,

$$M(g, S) - m(g, S) = \omega(g, S) \geq \omega_g(z_s) \geq \frac{1}{n},$$

de donde deducimos que

$$\frac{1}{n} \sum_{S \in C_2} v(S) \leq \sum_{S \in C_2} (M(g, S) - m(g, S))v(S) \leq$$

$$\sum_{S \in P} (M(g, S) - m(g, S))v(S) < \frac{\varepsilon}{2n},$$

y así $\sum_{S \in C_2} v(S) < \varepsilon/2$. Entonces, $C = C_1 \cup C_2$ es una colección finita de rectángulos que recubre el conjunto $D_{1/n}$, con

$$\sum_{R \in C} v(R) \leq \sum_{R \in C_1} v(R) + \sum_{R \in C_2} v(R) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que $D_{1/n}$ tiene volumen cero.

(\impliedby) Supongamos ahora que el conjunto $D = \{x : g \text{ es discontinua en } x\}$ tiene medida cero.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sea M tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in B$. Sea $D_\varepsilon = \{x \in B : \omega_g(x) \geq \varepsilon\}$. Por el lema 2.1, (p. 34), se tiene que $D_\varepsilon \subseteq D$. Como D_ε tiene medida cero (por ser un subconjunto de D , que tiene medida cero), existe una colección numerable de rectángulos B_1, B_2, \dots tales que $D_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(B_i)$ y $\sum_{i=1}^{\infty} v(B_i) < \varepsilon$. Pero D_ε es compacto (lema 2.2, p. 34); luego existe

$N \in \mathbb{N}$ tal que $D_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^N \text{int}(B_i)$ y, por supuesto, $\sum_{i=1}^N v(B_i) < \varepsilon$.

Ahora, sea P_0 una partición de B tal que cada subrectángulo de P_0 bien está contenido en alguno de los B_i o bien su interior es disjunto con los B_i . Podemos dividir los subrectángulos de P_0 en dos clases C_1 y C_2 (no necesariamente disjuntas):

$$\begin{aligned} C_1 &= \{Q \in P_0 : Q \subseteq B_i \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, N\}, \text{ y} \\ C_2 &= \{Q \in P_0 : Q \cap D_\varepsilon = \emptyset\}, \end{aligned}$$

de modo que $P_0 = C_1 \cup C_2$.

Sea S un subrectángulo de C_2 ; entonces $\omega_g(x) < \varepsilon$ en cada punto $x \in S$. Por tanto, para cada $x \in S$, existe una vecindad abierta U_x de x tal que

$$M(g, U) - m(g, U) = \sup\{|g(z) - g(y)| : y, z \in U\} < \varepsilon.$$

Ahora, como S es compacto y $S \subseteq \bigcup_{x \in S} U_x$, existe una cantidad finita de puntos $x_1^s, \dots, x_{K_s}^s \in S$ tal que

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{K_s} U_i^s,$$

donde se denota $U_i^s = U_{x_i^s}$. Escojamos una partición P_S de S tal que cada subrectángulo de P_S está contenido en alguno de los U_i^s (esto es siempre posible; ver el ejercicio 2.31).

Sea ahora P una partición de B tal que cada subrectángulo Q de P o bien está contenido en alguno de los subrectángulos de las particiones P_s anteriores, o bien su interior es disjunto con los subrectángulos de las P_s y, en este caso, Q está contenido en alguno de los rectángulos que son miembros de la clase C_1 . Una tal partición puede definirse utilizando todos los lados de todos los miembros de C_1 y de las particiones P_s . Podemos dividir esta partición P en dos clases (ahora disjuntas, aunque esto no tenga especial relevancia), C'_2 y C'_1 , según se dé una u otra de las dos posibilidades, es decir,

$$C'_2 = \{Q \in P : \exists S \in C_2, \exists R \in P_s : Q \subseteq R\},$$

y

$$C'_1 = \{Q \in P : \forall S \in C_2, \forall R \in S : \text{int}(Q) \cap R = \emptyset, \text{ y } \exists T \in C_1 : Q \subseteq T\},$$

de forma que $P = C'_1 \cup C'_2$. Para esta partición P tenemos que

$$U(g, P) - L(g, P) \leq$$

$$\sum_{Q \in C'_2} (MQ(g) - mQ(g))v(Q) + \sum_{Q \in C'_1} (MQ(g) - mQ(g))v(Q) \leq \\ \varepsilon v(B) + \sum_{Q \in C'_1} 2Mv(Q) \leq \varepsilon v(B) + 2M\varepsilon,$$

ya que $\sum_{Q \in C'_1} v(Q) \leq \sum_{i=1}^N v(B_i) < \varepsilon$. Como $v(B)$ y M no dependen de ε , y ε es arbitrario, utilizando el criterio de integrabilidad de Riemann se concluye que g (y por tanto f) es integrable. \square

El teorema de Lebesgue tiene muchas consecuencias útiles e importantes. A continuación apuntamos algunas.

Corolario 2.1. *Un subconjunto acotado A de \mathbb{R}^n tiene volumen si y solo si su frontera ∂A tiene medida cero.*

Este corolario responde la segunda pregunta que se planteaba al inicio de este capítulo.

Demostración. Por la definición de conjunto con volumen y por el teorema 2.4 (p. 34), basta demostrar que el conjunto de discontinuidades de la función característica χ_A ,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in /A, \end{cases}$$

es precisamente la frontera de A . Por un lado, si $x \in \partial A$, entonces cualquier vecindad de x corta tanto a A como a $\mathbb{R}^n \setminus A$. Esto implica decir que en cualquier vecindad de x hay puntos y tales que $\chi_A(y) - \chi_A(x) = 1$, luego χ_A no puede ser continua en x . Por otra parte, si $x \notin \partial A$ entonces existe una vecindad V_x de x que, o bien $V_x \subset A$ o bien $V_x \subset \mathbb{R}^n \setminus A$; en cualquiera de los casos resulta que χ_A es constante en V_x , y por tanto, es obviamente continua en x . Por consiguiente, $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \chi_A \text{ es discontinua en } x\}$. \square

Corolario 2.2. *Sea A un subconjunto acotado y con volumen de \mathbb{R}^n . Cualquier función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, cuyos puntos de discontinuidad formen un conjunto de medida cero, es integrable.*

Demostración. Sea g la extensión de f a todo \mathbb{R}^n .

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g \text{ es discontinua}\} \subseteq \{x \in A : f \text{ es discontinua}\} \cup \partial A,$$

si denotamos por $\text{Disc}(f)$ el conjunto de los puntos de discontinuidad de f en A , y por $\text{Disc}(g)$ el conjunto de discontinuidades de la extensión g en \mathbb{R}^n , debe ser claro (por la misma razón que en la demostración del corolario 2.1) que

$$\text{Disc}(g) \subseteq \text{Disc}(f) \cup \partial A,$$

y como tanto $\text{Disc}(f)$ (por hipótesis) como ∂A (por tener A volumen y gracias al corolario 2.1) tienen medida cero, su unión tiene medida cero, y por la observación 2.3 (p. 27), $\text{Disc}(g)$ tiene medida cero. \square

Observación 2.7. Nótese que en el teorema 2.4, la integrabilidad de f depende de su extensión. Por ejemplo, si A es el conjunto de los racionales del intervalo $[0, 1]$ y $f = 1$, entonces f restringida a A es continua, pero su extensión canónica no es continua en ningún punto y en particular no es integrable, luego f no es integrable sobre A según la definición que se ha dado. Por otra parte, en el enunciado del corolario 2.2 no es necesario extender f fuera de A porque, como se ve en la prueba, el conjunto de puntos de discontinuidad de su extensión canónica no se va a incrementar significativamente, a lo sumo se añadiría la frontera de A , que es un subconjunto de medida cero, ya que A tiene volumen.

Una consecuencia inmediata del corolario 2.2 es la siguiente:

Corolario 2.3. Sea A un subconjunto acotado y con volumen de \mathbb{R}^n . Cualquier función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, cuyos puntos de discontinuidad formen un conjunto finito o numerable, es integrable.

La mayoría de las funciones que se manejan en la práctica son continuas o continuas por pedazos (es decir, continuas salvo en un conjunto finito de puntos), y por tanto, según el corolario 2.3, son también integrables.

Teorema 2.5. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo x , y además $\int_A f(x)dx = 0$, entonces el conjunto

$$\{x \in A : f(x) \neq 0\}$$

tiene medida cero.

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$, probaremos que el conjunto $A_m = \{x \in A : f(x) > 1/m\}$ tiene contenido cero. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Sea S un rectángulo que contenga a A , y extendamos f a S poniendo $f(x) = 0$ para $x \in S \setminus A$ como de costumbre. Sea P una partición de S , tal que $U(f, P) < \varepsilon/m$; existe una tal partición porque $\int_A f = 0$. Sean S_1, \dots, S_K los subrectángulos de la partición P para los que $S_j \cap A_m \neq \emptyset$, para $j = 1, 2, \dots, K$; entonces se tiene $mM(f, S_j) > 1$ para $j = 1, 2, \dots, K$, y por tanto

$$\sum_{i=1}^K v(S_i) \leq \sum_{i=1}^K mM(f, S_i)v(S_i) \leq mU(f, P) < \varepsilon.$$

Es decir, los rectángulos S_1, \dots, S_K forman un recubrimiento de A_m , tal que $\sum_{i=1}^K v(S_i) < \varepsilon$. Esto prueba que A_m tiene contenido cero. En particular, A_m tiene medida cero, para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como

$$\{x \in A : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m,$$

y puesto que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, se deduce que este conjunto tiene medida cero. \square

Ejercicios

2.29. Sea $f(x) = \text{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Probar que $\omega_f(0) = 2$.

2.30. Sea $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, y $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Probar que $\omega_f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.31. Sea S un rectángulo cerrado, y G_1, \dots, G_k un recubrimiento finito de S por conjuntos abiertos. Probar que existe una partición P de S , tal que cada subrectángulo de P está contenido en alguno de los abiertos G_i .

Sugerencia: para cada $x \in S$ existen $i \in \{1, \dots, k\}$ y $\delta_x > 0$, tales que $B_\infty(x, \delta_x) \subseteq G_i$; entonces $S \subseteq \bigcup_{x \in S} B_\infty(x, \delta_x)$. Usar ahora que S es compacto y recordar que las bolas $B_\infty(x, r)$ tienen forma de cubos.

2.32. Demostrar que si A y B tienen volumen, entonces $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \setminus B$ también tienen volumen.

2.33. Sea $f(x, y) = 1$ para $x \neq 0$, y $f(0, y) = 0$ para todo y . Probar que f es integrable en cualquier rectángulo de \mathbb{R}^2 , y hallar estas integrales.

2.34. Sea $f(x) = \text{sen}(1/x)$ para $x > 0$, y $f(0) = 0$. ¿Es f integrable en $[0, 1]$?

2.35. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \text{sen} \frac{1}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ x^2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Probar que f es integrable en el círculo unidad abierto, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

2.36. Decidir si las funciones que siguen son integrables en los conjuntos indicados:

(a) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\text{con } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} < 1\}.$$

(b) $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 + y^2 < 1/2 \text{ o bien } y = 0, \\ x \text{sen} \frac{1}{y} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\text{con } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

(c) $h : C \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ x & \text{si } y < x \end{cases}$$

con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$.

2.37. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional,} \\ \frac{1}{m} & \text{si } x = \frac{n}{m}, \text{ con } n, m \text{ primos relativos.} \end{cases}$$

Probar que f es continua en x si y solo si x es irracional. Concluir que f , pese a ser discontinua en un subconjunto denso de $[0, 1]$, es integrable en $[0, 1]$.

2.38. Para cada $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definamos

$$\lambda(B) = \inf\{v(S_i) : (S_i) \text{ recubrimiento de } B \text{ por rectángulos abiertos}\}.$$

Probar que si B tiene volumen entonces $\lambda(B) = v(B)$.

A λ se le llama medida exterior de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

2.39. Si (B_i) es una sucesión de conjuntos con volumen que son disjuntos dos a dos y $B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ tiene volumen, entonces

$$v(B) = \sum_{i=1}^{\infty} v(B_i).$$

Sugerencia: usar el ejercicio 2.38.

2.40. Sea r_1, r_2, \dots una enumeración de los racionales de $[0, 1]$, y sea

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(r_k - \frac{1}{5k}, r_k + \frac{1}{5k} \right).$$

Probar que U es un subconjunto abierto de \mathbb{R} que no tiene volumen.

Sugerencia: usar el ejercicio 2.38.

2.41. Sea A un subconjunto abierto y con volumen de \mathbb{R}^n , y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(x) \geq 0$ para todo x . Supongamos que existe $x_0 \in A$, tal que $f(x_0) > 0$. Demostrar que entonces $\int_A f > 0$.

2.42. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $\int_A |f - g| = 0$. Probar que entonces $f(x) = g(x)$ para casi todo x , es decir, salvo quizás en un subconjunto de A , de medida cero.

2.43. Sean A un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n , y (f_k) una sucesión de funciones que converge uniformemente en A a otra función f . Sea S un rectángulo que contenga a A , y extendamos cada una de estas funciones a S haciéndolas valer cero en $S \setminus A$, como de costumbre. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea D_k el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f_k (extendida). Demostrar que el conjunto D de los puntos de discontinuidad de f está contenido en $\cup_{k=1}^{\infty} D_k$.

Sugerencia: recordar que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas en un conjunto es continuo en ese conjunto.

2.44. Utilizando el ejercicio 2.43, probar que si A es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n , y (f_k) una sucesión de funciones integrables que converge uniformemente en A a otra función f , entonces f es también integrable en A .

2.45. En las hipótesis del ejercicio 2.44, probar que además se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k = \int_A f.$$

Sugerencia: la prueba usual que se da de este hecho para funciones de una variable se generaliza sin dificultad al caso de funciones de varias variables.

Capítulo 3

El teorema de Fubini

Se dispone de una variedad de técnicas para calcular la integral de una función real de una variable real. La herramienta clave es, por supuesto, el teorema fundamental de cálculo. Típicamente lo que se hace encontrar (en caso de ser posible) una antiderivada de la función que se está integrando y evaluarla en los extremos del intervalo y restar los valores obtenidos. Pero para calcular una integral en varias variables esto no es tan sencillo. Afortunadamente hay un teorema que con mucha frecuencia nos permite usar el procedimiento descrito para el cálculo de integrales en varias variables. Es el teorema de Fubini que, en muchos casos, nos permite calcular una integral en varias variables, mediante una secuencia (finita) de integrales en una variable.

3.1 El caso de dos variables

Comenzaremos por estudiar la versión del teorema de Fubini en el plano.

Teorema 3.1. (de Fubini) Sea $A = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo de \mathbb{R}^2 , y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, tal que las funciones $f_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f_x(y) = f(x, y)$, son integrables en $[c, d]$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces, la función $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ es integrable en $[a, b]$, y

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Análogamente, si se supone que $\int_a^b f(x, y) dx$ existe para cada $y \in [c, d]$, se obtiene que

$$\int_A f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Demostración. Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Tenemos que ver que g es integrable sobre $[a, b]$, y que

$$\int_A f = \int_a^b g(x) dx.$$

Sea $P_{[a,b]}$ una partición cualquiera de $[a, b]$ en subintervalos $S_j = [s_{j-1}, s_j]$, donde $a = s_0 < s_1 < \dots < s_N = b$, y sea $P_{[c,d]}$ una partición de $[c, d]$ en subintervalos $T_j = [t_{j-1}, t_j]$, donde $c = t_0 < t_1 < \dots < t_M = d$. Sea entonces P_A la partición de A dada por los rectángulos

$$R_{ij} = S_i \times T_j, \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M.$$

Nótese que cualquier partición del rectángulo A se obtiene de esta manera, como producto de particiones de los lados de A .

Se tiene que

$$L(f, P_A) = \sum_{i,j} m(f, R_{ij})v(R_{ij}) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^M m(f, R_{ij})v(T_j) \right) v(S_i).$$

Además, para cada $x \in S_i$ y para cada j se tiene $m(f, R_{ij}) \leq m(f_x, T_j)$. Por tanto, sumando sobre j estas desigualdades, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^M m(f, R_{ij})v(T_j) \leq \sum_{j=1}^M m(f_x, T_j)v(T_j) \leq \int_c^d f_x(y) dy = g(x).$$

Como estas desigualdades valen para cualquier $x \in S_i$, podemos tomar el ínfimo sobre x para obtener

$$\sum_{j=1}^M m(f, R_{ij})v(T_j) \leq m(g, S_i)$$

para cada i , y entonces, sumando sobre i ,

$$L(f, P_A) \leq \sum_{i=1}^N m(g, S_i)v(S_i) \leq L(g, P_{[a,b]}).$$

Con un argumento análogo para supremos y sumas superiores, deducimos que

$$L(f, P_A) \leq L(g, P_{[a,b]}) \leq U(g, P_{[a,b]}) \leq U(f, P_A).$$

Como esto vale para cualquier partición P_A de A y, lo que es lo mismo, para cualesquiera particiones $P_{[a,b]}$ y $P_{[c,d]}$ de $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente, y f es integrable, se deduce inmediatamente de estas desigualdades que g es integrable sobre $[a, b]$, y

$$\int_A f = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad \square$$

Ejemplo 3.1. Calcule $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{\pi}} y^3 \operatorname{sen}(xy^2) dy dx$.

Solución. La integral interior, $\int_0^{\sqrt{\pi}} y^3 \operatorname{sen}(xy^2) dy$, es algo laboriosa. Pero si cambiamos el orden de integración, la integral interior será $\int_0^1 y^3 \operatorname{sen}(xy^2) dx = y - y \cos y^2$. Entonces la integral es

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^1 y^3 \operatorname{sen}(xy^2) dx dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} (y - y \cos y^2) dy = \frac{\pi}{2}. \quad \diamond$$

Observación 3.1. Si f es continua, entonces las funciones f , f_x y f_y (con $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$) son todas integrables, y entonces se obtiene que

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Este resultado se puede aplicar a regiones (acotadas) A más generales que rectángulos, extendiendo la función a un rectángulo que contenga a A (haciéndola valer cero fuera de A , como es habitual) y usando entonces el teorema de Fubini.

El siguiente corolario nos muestra una manera de hacer esto; el resultado puede utilizarse eficientemente para descomponer una región complicada en regiones más pequeñas a cada una de las cuales se aplica entonces el corolario.

Corolario 3.1. Sean $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in [a, b]$, y sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua (o continua salvo en una cantidad finita de puntos). Entonces

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (3.1)$$

Demostración. Sea $S = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo cerrado que contenga a A , y extendamos f a S poniendo $f = 0$ en $S \setminus A$, como es habitual. Por el ejemplo 2.2 (p. 25), las gráficas de φ y ψ , es decir, los conjuntos $G(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in [a, b]\}$ y $G(\psi) = \{(x, \psi(x)) : x \in [a, b]\}$ tienen medida cero. Debe ser claro que el conjunto de las discontinuidades de la función extendida f está contenido en la unión de estas dos gráficas, y por tanto, tiene también medida cero. Luego, por el teorema de Lebesgue, f es integrable en S . Por otro lado, para cada $x \in [a, b]$, f_x es continua en $[c, d]$, salvo quizás en los puntos $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, y por tanto, todas las f_x son integrables. Entonces, podemos aplicar el teorema de Fubini, lo que nos da, teniendo en cuenta que cada f_x es cero en $[c, \varphi(x)] \cup [\psi(x), d]$, que

$$\int_A f = \int_S f = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad \square$$

Consideremos la aplicación siguiente.

Si D es un sólido en \mathbb{R}^n con densidad de masa δ , entonces el *centro de masa* de D es el punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ donde

$$\bar{x}_k = \frac{\int_D x_k \delta(x) dx}{\int_D \delta(x) dx}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Nótese que el denominador, $\int_D \delta(x) dx$, es la masa de la región D .

Ejemplo 3.2. Halle el centro de masa de la región D en \mathbb{R}^3 acotada por $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$, suponiendo que la densidad es uniforme (es decir, constante).

Solución. La masa del sólido acotado por la región D es

$$\begin{aligned} \int_D \delta(x) dx &= \int_0^2 \int_0^{2-x_1} \int_0^{2-x_1-x_2} \delta dx_3 dx_2 dx_1 \quad (\delta \text{ constante}) \\ &= \delta \int_0^2 \int_0^{2-x_1} (2-x_1-x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \delta \int_0^2 \left(2-2x_1 + \frac{1}{2}x_1^2\right) dx_1 = \frac{4}{3}\delta \end{aligned}$$

La coordenada \bar{x}_1 del centro de masa es

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{\int_D x_1 \delta dx}{\int_D \delta(x) dx} = \frac{3}{4} \int_D x_1 dx \\ &= \frac{3}{4} \int_0^2 \int_0^{2-x_3} \int_0^{2-x_2-x_3} x_1 dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \frac{3}{4} \int_0^2 \int_0^{2-x_3} \left(\frac{1}{2}(2-x_2-x_3)^2\right) dx_2 dx_3 = \frac{3}{8} \int_0^2 \int_0^{2-x_3} (2-x_2-x_3)^2 dx_2 dx_3 \\ &= \frac{3}{8} \int_0^2 \frac{1}{3}(2-x_3)^3 dx_3 = \frac{1}{8} \int_0^2 (2-x_3)^3 dx_3 = \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por la simetría de la región D , se concluye que los valores de las coordenadas \bar{x}_2 y \bar{x}_3 coinciden con el de \bar{x}_1 . Así, el centro de masa de D es $\bar{x} = \frac{1}{2}(1, 1, 1)$. \diamond

3.2 El caso general

Cuando f es integrable, pero no continua, pueden surgir dificultades con respecto a la existencia de las integrales involucradas en las fórmulas del teorema de Fubini. Por ejemplo, la integral

$\int_c^d f(x, y) dy$ puede no existir para toda x aún cuando la integral $\int_Q f$ exista, pues la función se

puede comportar de una manera extraña, por así decirlo, a lo largo de una sola línea vertical, sin que esto comprometa la existencia de la integral doble.

Este problema se puede evitar requiriendo que todas las integrales involucradas existan, lo que podría ser algo restrictivo. Sin embargo, ocurre que si la integral interior (en el establecimiento de la fórmula) se cambia por la correspondiente integral inferior (o por la integral superior), que siempre existen, entonces se obtiene un teorema general correcto que incluye, por supuesto, el caso especial en el que todas las integrales involucradas existen.

Teorema 3.2. (de Fubini) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ rectángulos, y sea $Q = A \times B$. Sea $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Escribiremos f en la forma $f(x, y)$ con $x \in A$ y $y \in B$. Para cada $x \in A$ consideremos las funciones

$$\underline{I}(x) = \int_{\underline{y} \in B} f(x, y) \quad y \quad \bar{I}(x) = \int_{\bar{y} \in B} f(x, y).$$

Si f es integrable sobre Q , entonces estas dos funciones de x son integrables sobre A y

$$\int_Q f = \int_A \underline{I}(x) = \int_A \bar{I}(x).$$

Demostración. Probaremos que si f es integrable sobre Q entonces \underline{I} y \bar{I} son integrables sobre A y que la integral de cada una de ellas es igual a $\int_Q f$.

Sea P una partición de Q . Entonces P consiste de una partición P_A de A y una partición P_B de B . Escribiremos $P = (P_A, P_B)$. Si R_A es un rectángulo genérico de A determinado por P_A y si R_B es un rectángulo genérico de B determinado por P_B , entonces $R_A \times R_B$ es un rectángulo genérico de Q determinado por P .

La demostración está estructurada en cuatro pasos.

Primero se establece una comparación entre las sumas inferior y superior de f y las sumas inferiores y superiores de \underline{I} y \bar{I} .

1. Mostraremos primero que $L(f, P) \leq L(\underline{I}, P_A)$.

Consideremos un subrectángulo genérico $R_A \times R_B$ determinado por P y sea $x_0 \in R_A$. Debiera ser claro que $m(f, R_A \times R_B) \leq f(x_0, y)$ para cualquier $y \in R_B$, y, por tanto, $m(f, R_A \times R_B) \leq m(f(x_0, y), R_B)$. Dejando fijos a x_0 y R_A , multiplicando por $v(R_B)$ y sumando sobre todos los subrectángulos R_B , obtenemos

$$\sum_{R_B} m(f, R_A \times R_B)v(R_B) \leq L(f(x_0, y), P_B) \leq \int_{\underline{y} \in B} f(x_0, y) = \underline{I}(x_0).$$

Como este resultado es válido para cada $x_0 \in R_A$, se concluye que

$$\sum_{R_B} m(f, R_A \times R_B)v(R_B) \leq m(\underline{I}, R_A).$$

Ahora multiplicamos por $v(R_A)$ y sumamos. Como $v(R_A)v(R_B) = v(R_A \times R_B)$, se obtiene que

$$L(f, P) \leq L(\underline{I}, P_A).$$

2. Con un argumento similar se obtiene que

$$U(f, P) \geq U(\bar{I}, P_A).$$

3. Las relaciones entre las sumas inferior y superior de f y las sumas inferiores y superiores de \underline{I} y \bar{I} , se representan en el diagrama siguiente.

$$\begin{array}{ccc} & \textcircled{3} & U(\underline{I}, P_A) & \textcircled{5} \\ & \leq & & \leq \\ L(f, P) & \textcircled{1} & L(\underline{I}, P_A) & & U(\bar{I}, P_A) & \textcircled{2} & \leq & U(f, P) \\ & & & & & & & & \textcircled{6} & L(\bar{I}, P_A) & \textcircled{4} \\ & & & & & & & & \leq & & \leq \end{array}$$

Las desigualdades ① y ② se obtuvieron en los pasos 1 y 2; las desigualdades ③ y ④ son consecuencia de la observación 1.4 (p. 14); las desigualdades ⑤ y ⑥ son consecuencias de la observación 1.3 (p. 14).

4. En este paso se demuestra el teorema. Como f es integrable sobre Q , dado $\varepsilon > 0$, el teorema 1.1 (p. 15) garantiza que existe una partición $P = (P_A, P_B)$ de Q , tal que $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$. Entonces $U(\underline{I}, P_A) - L(\underline{I}, P_A) < \varepsilon$ y $U(\bar{I}, P_A) - L(\bar{I}, P_A) < \varepsilon$. Entonces, tanto \underline{I} como \bar{I} son integrables sobre A .

Ahora, por definición (ver observación 1.4, p. 14) la integral $\int_A \underline{I}$ está entre las sumas inferior y superior de \underline{I} . De la misma manera, la integral \bar{I} está entre las sumas inferior y superior de \bar{I} . Por tanto, los tres números, $\int_A \underline{I}$, $\int_A \bar{I}$ y $\int_Q f$, están entre los números en los extremos del diagrama. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que

$$\int_A \underline{I} = \int_A \bar{I} = \int_Q f. \quad \square$$

Ejercicios

3.1. Calcular $\int_A (x+y)x \, dx \, dy$, donde $A = [0, 1] \times [0, 1]$.

3.2. Calcular las siguientes integrales iteradas:

$$(a) \int_{-1}^0 \int_0^1 (x^4 y + y^2) \, dy \, dx; \quad (b) \int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x \ln y \, dy \, dx; \quad (c) \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{y} \arcsen y} y \cos(xy) \, dx \, dy$$

3.3. Expresar las integrales iteradas siguientes como integrales múltiples sobre una región, dibujar la región y cambiar el orden de integración; finalmente, hallar el valor de las integrales usando el orden de integración que dé lugar a los cálculos más simples.

(a) $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y) dx dy$

(b) $\int_1^2 \int_0^{\ln x} (x - 1) \sqrt{1 + e^{2y}} dy dx$

(c) $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx$

(d) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \operatorname{sen} x dx dy$

(e) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (x + 2y + 3z) dz dy dx$

(f) $\int_0^1 \int_0^{f(y)} xy dx dy$, con $f(y) = \min \left\{ 1, \ln \frac{1}{y} \right\}$

(g) $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} y(1 - y^2)^{1/2} dy dx$

3.4. Sea $A = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

(a) Decidir si f es integrable en A .

(b) Calcular $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ si existe.

(c) Calcular $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ si existe.

3.5. Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_0^a \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx dy$

(b) $\int_0^a \int_{b/a}^b f(x, y) dy dx$

(c) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz dy dx$

(d) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz dx dy$

3.6. (Diferenciación bajo el signo de la integral) Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$. Definamos

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Probar que F es derivable y que

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Sugerencia: usando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$F(u) = \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b \left(\int_c^u \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy + f(x, c) \right) dx.$$

3.7. Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $\frac{\partial f}{\partial y}$, continua en $[a, b] \times [c, d]$. Definamos

$$F(x, y) = \int_a^x f(t, y) dt.$$

(a) Calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$

(b) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t, x) dt$, calcular $G'(x)$.

3.8. Calcular las integrales siguientes

(a) $\int_D x^2 y dx dy$, donde D es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

(b) $\int_D ye^{-xy} dx dy$, donde D es el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

(c) $\int_D x dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, 0 \leq y \leq \sin x^2\}$.

(d) $\int_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, donde D es el interior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(e) $\int_D |\max\{x, y\}| dx dy$, donde $D = [-2, 2] \times [-1, 1]$.

3.9. Probar la siguiente generalización del corolario 3.1 del teorema de Fubini. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado, y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones continuas, tales que $\varphi_j(x) \leq \psi_j(x)$ para todo $x \in A$, $1 \leq j \leq m$. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in A, \varphi_j(x) \leq y_j \leq \psi_j(x), 1 \leq j \leq m\}$. Para cada $x \in A$ definamos $B_x \subset \mathbb{R}^m$ por

$$B_x = \{y \in \mathbb{R}^m : \varphi_j(x) \leq y_j \leq \psi_j(x), 1 \leq j \leq m\}.$$

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y definamos $f_x : B_x \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_x(y) = f(x, y)$, y $g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \int_{B_x} f_x.$$

Entonces g es integrable sobre A , y

$$\int_D f = \int_A g.$$

3.10. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos con volumen, y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Sean $F, G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas como sigue:

$$F(x, y) = f(x) + g(y) \quad y \quad G(x, y) = f(x)g(y).$$

Hallar $\int_{A \times B} F(x, y) dx dy$ y $\int_{A \times B} G(x, y) dx dy$ en función de $\int_A f$, $\int_B g$, $v(A)$ y $v(B)$.

3.11. Hallar el volumen de la región acotada por $z = x^2 + 3y^2$, $z = 9 - x^2$.

3.12. Hallar el volumen de la región acotada por $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$, $x + y + 2z = 2$.

3.13. Sea A la región de \mathbb{R}^3 acotada por los planos $x = 0, y = 0, z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, con $x \geq 0, y \geq 0$. Calcular la integral $\int_A x \, dx \, dy \, dz$.

3.14. Calcular la integral $\int_A ye^{-xy} \, dx \, dy \, dz$, donde $A = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

3.15. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones A , determinadas por los límites de integración:

(a) $\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} (x + y) \, dy \right) dx$;

(b) $\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} y \, dy \right) dx$.

3.16. Sea D la región acotada por los ejes positivos x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular $\int_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$.

3.17. Sea D la región dada como el conjunto de los (x, y) del plano, tales que $-\varphi(x) \leq y \leq \varphi(x)$ y $a \leq x \leq b$, donde φ es una función continua no negativa en el intervalo $[a, b]$. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en D , tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in D$. Probar que

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

3.18. Dibujar la región correspondiente a cada una de las siguientes integrales dobles, cambiar el orden de integración y evaluar la integral, usando el orden que sea más adecuado:

(a) $\int_0^1 \left(\int_x^1 xy \, dy \right) dx$

(b) $\int_0^1 \left(\int_{2-y}^1 (x + y)^2 \, dx \right) dy$

(c) $\int_{-1}^1 \left(\int_{|y|}^1 (x + y)^2 \, dx \right) dy$

3.19. Calcular $\int_W x^2 \cos z \, dx \, dy \, dz$, donde W es la región acotada por los planos $z = 0, z = \pi, y = 0, x = 0$ y $x + y = 1$.

3.20. Integrar $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ sobre la porción del primer octante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, cortada por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3.21. Utilizar integrales triples para hallar el volumen del sólido T de \mathbb{R}^3 , limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ e inferiormente por el paraboloides elíptico $z = x^2 + 3y^2$.

Capítulo 4

Integrales impropias

A menudo es necesario integrar funciones que no son acotadas, e incluso integrarlas sobre regiones no acotadas. Estos tipos de integrales reciben el nombre de integrales impropias. El cálculo de integrales impropias conduce a considerar problemas de convergencia. La convergencia de la integral impropia de una función de una variable, equivale a la convergencia de una serie asociada a la función; este es el criterio de la integral (teorema 4.3, p. 58).

Será suficiente con desarrollar la teoría de integrales impropias para funciones no negativas, pues si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, podemos usar el hecho de que $f = f^+ - f^-$, donde $f^+ = \max\{f, 0\}$ es la *parte positiva de f* , y $f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\}$ es la *parte negativa de f* , para concluir que f es integrable impropia si y solo si f^+ y f^- lo son, y en este caso $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$ (definición 4.3, p. 59).

Estudiaremos primero las integrales de funciones positivas y no acotadas definidas sobre regiones acotadas.

Definición 4.1. Sean A un subconjunto con volumen de \mathbb{R}^n , y $f : A \rightarrow [0, \infty)$ una función, posiblemente no acotada. Para cada $M > 0$ consideremos la función $f_M : A \rightarrow [0, \infty)$ definida por $f_M(x) = \min\{f(x), M\}$. Obsérvese que todas las f_M son acotadas en A . Supongamos que cada f_M es propiamente integrable sobre A . Nótese que, si $N \geq M$, entonces $0 \leq f_M \leq f_N \leq f$ y por tanto,

$\int_A f_M \leq \int_A f_N$, es decir, la función $M \mapsto \int_A f_M$ es creciente. Entonces definimos

$$\int_A f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_A f_M$$

si este límite es finito, y en este caso decimos que f es integrable (en sentido impropio) sobre A .

Debe observarse que si f es integrable en A , entonces todas las funciones $f_M = \min\{f, M\}$ son también integrables sobre A (ver ejercicio 1.10), y de hecho $f_M = f$ para todo M suficientemente grande, de modo que esta definición es ciertamente una extensión de la definición de función integrable.

El teorema siguiente es con frecuencia de mucha utilidad.

Proposición 4.1 (*criterio de comparación de integrales*). Sean A un subconjunto con volumen de \mathbb{R}^n , y $f, g : A \rightarrow [0, \infty)$ dos funciones (posiblemente no acotadas). Supongamos que cada f_M es integrable en A , que $f \leq g$, y que g es integrable sobre A . Entonces f es también integrable sobre A , y

$$\int_A f \leq \int_A g.$$

La prueba de esta proposición es directa, teniendo en cuenta que la función $M \mapsto F(M) = \int_A f_M$ es monótona creciente y que, para una tal función F , existe el límite $\lim_{M \rightarrow \infty} F(M)$ si y solo si F está acotada superiormente.

El siguiente teorema caracteriza la integrabilidad de una función f en un conjunto A , mediante la convergencia de las integrales de esa función sobre una sucesión de conjuntos compactos $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ que aproximan el conjunto A . Este criterio será particularmente útil cuando A sea un abierto de \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow [0, \infty)$ sea continua, de modo que f será propiamente integrable sobre cada subconjunto compacto y con volumen de A .

Teorema 4.1. Sea A un conjunto con volumen, y sea $f : A \rightarrow [0, \infty)$ una función, posiblemente no acotada. Sea $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de A , compactos y con volumen, tales que

$K_j \subseteq K_{j+1}$ para todo j , y $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Entonces, f es integrable sobre A si y solo si f es integrable sobre cada K_j y el límite $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{K_j} f$ es finito. Además, en este caso,

$$\int_A f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{K_j} f.$$

En particular, para $f = 1$, se tiene que

$$v(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} v(K_j).$$

Demostración. Consideremos primero el caso en el que $f = 1$. En este caso debemos verificar que para toda sucesión $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ de subconjuntos de A , compactos y con volumen, tales que $K_j \subseteq K_{j+1}$

para todo j y $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, ocurre que

$$v(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} v(K_j).$$

Para cada $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos

$$\lambda(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(S_i) : \{S_i\} \text{ es recubrimiento de } B \text{ por rectángulos abiertos} \right\}.$$

No es difícil comprobar (ver ejercicios 2.38 y 2.39) que si B tiene volumen, entonces $\lambda(B) = v(B)$, y que, si $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos con volumen que son disjuntos dos a dos y $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ tiene volumen, entonces

$$v(B) = \sum_{i=1}^{\infty} v(B_i).$$

Ahora, si $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos de A , compactos y con volumen, tales que $K_j \subseteq K_{j+1}$ para todo j , y $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, definimos $B_1 = K_1$, $B_2 = K_2 \setminus K_1$, y en general, para $j \geq 2$, $B_j = K_j \setminus K_{j-1}$. Debiera ser claro que $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos con volumen que son disjuntos dos a dos, y que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Entonces, por el ejercicio 2.39, se tiene que

$$v(A) = \sum_{i=1}^{\infty} v(B_i). \quad (4.1)$$

Pero, como para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $K_N = \bigcup_{j=1}^N B_j$, y los B_j son ajenos dos a dos, tenemos que

$$v(K_N) = \sum_{i=1}^N v(B_i). \quad (4.2)$$

Entonces, combinando (4.1) y (4.2), obtenemos:

$$v(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} v(K_N).$$

Ahora ya podemos probar el resultado en su forma más general. Fijemos una sucesión $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ de subconjuntos de A , compactos y con volumen, tales que $K_j \subseteq K_{j+1}$ para todo j y $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

Supongamos primero que f es integrable (impropia) sobre A . Como cada K_j tiene volumen y las funciones f_M son integrables para toda M , entonces las funciones $f_M \chi_{K_j}$ son integrables. Como además es $f \chi_{K_j} \leq f \chi_A$, y $f \chi_A$ es integrable por hipótesis, el criterio de comparación nos dice que $f \chi_{K_j}$ es integrable, es decir, f es integrable en K_j , y $\int_{K_j} f \leq \int_A f$, para todo j . Además, como la

sucesión $\left\{ \int_{K_j} f \right\}_{j=1}^{\infty}$ es monótona creciente y acotada, existe el límite $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{K_j} f$.

Recíprocamente, supongamos que cada f es integrable sobre K_j y que existe el límite $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{K_j} f = L$.

Para cada $M > 0$ y cada $j \in \mathbb{N}$, la función $f_M \chi_{K_j}$ es integrable por hipótesis, luego su conjunto de puntos de discontinuidad $D(f_M \chi_{K_j})$ tiene medida cero. Como $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_j$, debe ser claro que el conjunto de los puntos de discontinuidad de $f_M \chi_A$ satisface

$$D(f_M \chi_A) \subseteq \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} D(f_M \chi_{K_j}) \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} \partial K_j \right] \cup \partial A,$$

y entonces $D(f_M \chi_A)$ tiene medida cero (por estar contenido en una unión numerable de conjuntos de medida cero), lo que significa que cada f_M es propiamente integrable en A . Veamos que f es integrable sobre A . Esto equivale a probar que la función $M \mapsto \int_A f_M$ está acotada. Fijado un $M > 0$ arbitrario, por un lado tenemos que

$$\int_{K_j} f_M \leq \int_{K_j} f \leq L. \quad (4.3)$$

Por otra parte, como $v(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} v(K_j)$, dado $\varepsilon > 0$, existe j tal que

$$v(A \setminus K_j) = v(A) - v(K_j) \leq \frac{\varepsilon}{M},$$

y por tanto

$$\int_A f_M - \int_{K_j} f_M = \int_{A \setminus K_j} f_M \leq Mv(A \setminus K_j) \leq \varepsilon,$$

de donde

$$\int_A f_M - \varepsilon \leq \int_{K_j} f_M. \quad (4.4)$$

Combinando (4.3) y (4.4) tenemos que

$$\int_A f_M - \varepsilon \leq L. \quad (4.5)$$

Ahora, haciendo tender ε a cero en (4.5), obtenemos que

$$\int_A f_M \leq L,$$

y esto vale para todo $M > 0$. Por tanto, la función $M \mapsto \int_A f_M$ está acotada, f es integrable sobre A , y $\int_A f \leq L$. Además, como para todo j se tiene

$$\int_{K_j} f \leq \int_A f \leq L,$$

y $L = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{K_j} f$, se deduce que

$$\int_A f = L. \quad \square$$

Ejemplo 4.1. Sea $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Usar el teorema 4.1 para demostrar que la función $f(x, y) = (xy)^{-1/2}$ es integrable impropia sobre A , y calcular $\int_A f$.

Solución. Para $j = 1, 2, \dots$, sea $K_j = \left[\frac{1}{j+1}, 1 \right] \times \left[\frac{1}{j+1}, 1 \right]$. Cada rectángulo K_j está contenido

en A , es compacto, tienen volumen, y además, $K_j \subset K_{j+1}$ para todo j y $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$. La función

$f(x, y) = (xy)^{-1/2}$ es integrable en cada K_j , con

$$\int_{K_j} f = \int_{1/(j+1)}^1 \int_{1/(j+1)}^1 (xy)^{-1/2} dx dy = \left[\int_{1/(j+1)}^1 x^{-1/2} dx \right]^2 = \left[2 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{j+1}} \right) \right]^2.$$

Entonces $\int_A f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{K_j} f = 4$. \diamond

Ahora estudiaremos el caso de una función $f \geq 0$, posiblemente no acotada, definida en un subconjunto A no acotado de \mathbb{R}^n .

Para cada $r > 0$, denotemos por $C_r = [-r, r] \times \dots \times [-r, r]$ el cuadrado que tiene centro el origen y lados de longitud $2r$. Nótese que $C_r = B_{\infty}(0, r)$, donde $B_{\infty}(0, r)$ es la bola con centro en el origen y radio r para la norma del supremo, $\|x\|_{\infty} = \sup_i |x_i|$.

Definición 4.2. Sean A un subconjunto no acotado de \mathbb{R}^n , y $f : A \rightarrow [0, \infty)$ una función que es integrable (quizás impropia) en cada cubo C_r de radio $r > 0$. Diremos que f es integrable (en sentido impropio) sobre A si existe el límite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{A \cap C_r} f$$

y en este caso se define $\int_A f$ como el valor de dicho límite.

El siguiente resultado caracteriza la integrabilidad de una función f , mediante la convergencia de las integrales de f sobre sucesiones de conjuntos con volumen que sean cada vez más grandes.

Teorema 4.2. Sean A un subconjunto no acotado de \mathbb{R}^n , y $f : A \rightarrow [0, \infty)$ una función que es integrable (quizás impropia) en $C \cap A$ para todo cubo $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión cualquiera de conjuntos acotados y con volumen tales que:

- (i) $B_k \subseteq B_{k+1}$ para todo k , y
- (ii) para todo cubo C , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C \subseteq B_k$.

Entonces, f es integrable (impropia) sobre A si y solo si $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A \cap B_k} f$ es finito. Además, en este caso,

$$\int_A f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A \cap B_k} f.$$

Demostración. Supongamos primero que f es integrable. Para cualquier sucesión $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfaga las condiciones del enunciado, si $C_a \subseteq B_k \subseteq C_b$, como $f \geq 0$, se tiene que

$$\int_{C_a} f \leq \int_{B_k} f \leq \int_{C_b} f \leq \int_A f. \quad (4.6)$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f = \int_A f$, existe $M > 0$ tal que, si $r \geq M$ entonces

$$\int_A f - \varepsilon \leq \int_{C_r} f. \quad (4.7)$$

Entonces, eligiendo $a, b \geq M$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes para que $C_a \subseteq B_{k_0} \subseteq C_b$, combinando (4.6) y (4.7), tenemos que

$$\int_A f - \varepsilon \leq \int_{B_{k_0}} f \leq \int_{B_k} f \leq \int_A f$$

para todo $k \geq k_0$. Esto prueba que existe $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f = \int_A f$.

Recíprocamente, supongamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f$ es finito para una sucesión $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ con las propiedades del enunciado. Por (i), y puesto que $f \geq 0$, es claro que la sucesión $\int_{B_k} f$ es monótona creciente.

Sea $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f$. Claramente, $\int_{B_k} f \leq \alpha$ para todo k . Pero, por (ii), para cada $r > 0$ existe un índice k tal que $C_r \subseteq B_k$, y por tanto,

$$\int_{C_r} f \leq \int_{B_k} f \leq \alpha.$$

Así, la función

$$F(r) = \int_{C_r} f$$

es creciente y está acotada superiormente por α , y por consiguiente existe $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \int_A f$; es decir, f es integrable (impropia) sobre A . \square

Ejemplo 4.2. Calcular la integral $\int_A xy e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$.

En el caso de funciones de una variable, recordemos el criterio de la integral, que establece la equivalencia entre convergencia de integrales impropias y de series de números reales.

Teorema 4.3. Sea $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función decreciente. Entonces la integral impropia $\int_1^{\infty} f$ converge si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.

Igual que antes, es fácil probar un *criterio de comparación* para esta definición más general de integral impropia:

Proposición 4.2. Sean A un subconjunto no acotado de \mathbb{R}^n , y $f, g : A \rightarrow [0, \infty)$ dos funciones que son integrables (quizás impropias) sobre cada cubo $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Supongamos que $f \leq g$ y que g es integrable (impropia) sobre A . Entonces f es también integrable (impropia) sobre A , y

$$\int_A f \leq \int_A g.$$

Por último, consideremos el caso más general posible de integral impropia: la de una función f no acotada, definida sobre un subconjunto no acotado A de \mathbb{R}^n , y que toma valores tanto positivos como negativos.

Recordemos que la parte positiva de f es $f^+ = \max\{f, 0\}$ y que $f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\}$ es la parte negativa de f ; debe ser obvio que $f = f^+ - f^-$, y $|f| = f^+ + f^-$.

Definición 4.3. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Se dice que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable (impropia) si las funciones f^+ y f^- son ambas integrables (impropias), y en este caso se define $\int_A f$ como

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-.$$

Nótese que, como $|f| = f^+ + f^-$, y $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$, esto equivale a pedir que $|f|$ sea integrable. Por eso, a veces también se dice que f es absolutamente integrable.

Para terminar, observaremos que casi todas las propiedades de la integral estudiadas en el capítulo 2.3 se extienden sin dificultad al caso de integrales impropias. Por ejemplo, el teorema 2.3 sigue siendo cierto en el caso de funciones integrables impropias (se invita al estudiante a justificar esta afirmación).

Sin embargo, hay otras propiedades de las funciones propiamente integrables que no se extienden al caso de integrales impropias; por ejemplo, el producto de funciones propiamente integrables es integrable, pero no es así cuando se habla de integrales impropias (ver el ejercicio 4.14).

Ejercicios

4.1. Sea $A = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Estudiar la integrabilidad de las siguientes funciones sobre A , calculando $\int_A f$ cuando sea posible.

(a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}$

(c) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}$

4.2. Estudiar la convergencia de la siguiente integral impropia

$$\int_A \frac{x}{y} dx dy$$

donde A es la región del plano acotada por $x = 1, x = y, x = 2y$.

4.3. Sea A una región no acotada del plano que puede describirse como

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < \infty, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

donde $\varphi, \psi : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $\varphi \leq \psi$. Sea f una función continua y no negativa sobre A . Utilizar el teorema de Fubini y los resultados de este Capítulo para probar que

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_a^\infty \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx.$$

Formular enunciados análogos para otro tipo de regiones no acotadas del plano \mathbb{R}^2 y del espacio \mathbb{R}^3 .

4.4. Calcular la integral $\int_A xy e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$.

4.5. Usar el ejercicio 4.3 para integrar e^{-xy} de dos maneras sobre la región $\{x \geq 0, 1 \leq y \leq 2\}$. Concluir que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \ln 2.$$

4.6. Probar que la integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ converge.

4.7. Sea A un abierto con volumen de \mathbb{R}^n . Probar que existe una sucesión $\{K_j\}_{j=1}^\infty$ de conjuntos compactos con volumen, tales que $K_j \subseteq K_{j+1}$ para todo j , y $A = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$.

Sugerencia: los K_j pueden ser uniones finitas de cubos cada vez más pequeños y más numerosos.

4.8. Probar que $\int_1^\infty x^p dx$ converge si $p < -1$ y diverge si $p \geq -1$.

4.9. Por el contrario, $\int_0^1 x^p dx$ converge si $p > -1$ y diverge si $p \leq -1$.

4.10. Demostrar que $\int_1^\infty x^p e^{-x} dx$ converge para todo $p \in \mathbb{R}$, y $\int_0^1 x^p e^{-x} dx$ converge si $p < -1$.

4.11. Sin embargo, $\int_0^1 x^p e^{1/x} dx$ diverge para todo $p \in \mathbb{R}$.

4.12. Probar que $\int_0^1 \ln x dx$ converge, mientras que $\int_1^\infty \frac{dx}{\ln x}$ diverge.

4.13. Reformular y demostrar el teorema 2.3 para el caso de integrales impropias.

4.14. Sean $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$. Probar que $\int_0^1 f$ y $\int_0^1 g$ convergen, y sin embargo, $\int_0^1 fg$ diverge.

4.15. Establecer por qué las siguientes integrales son impropias y determinar si son convergentes o divergentes. Calcular el valor de las que se pueda.

$$(a) \int_0^1 \ln x \, dx \quad (b) \int_1^2 \frac{1}{x \ln x} \, dx \quad (c) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx$$

$$(d) \int_0^1 x \ln x \, dx \quad (e) \int_0^\infty e^{-x} \, dx \quad (f) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}} \, dx$$

$$(g) \int_2^\infty \frac{\ln x}{x} \, dx \quad (h) \int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx \quad (i) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$(j) \int_{-\infty}^\infty e^{-x} \, dx \quad (k) \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \, dx \quad (l) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)} \, dx$$

$$(m) \int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x-1}} \, dx \quad (n) \int_0^1 \frac{1}{x \ln x} \, dx \quad (o) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2} \, dx.$$

Parte II

Cálculo en varias variables

Capítulo 5

El teorema del cambio de variables

En una variable, la técnica de integración por sustitución se presenta en la fórmula

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u) du.$$

Se supone que f es continua en $I = [a, b]$ y que $\phi : I \rightarrow J = \phi(I)$ es diferenciable con derivada integrable. Esta puede verse como una fórmula de cambio de variable, en la que $u = \phi(t)$ es el cambio de la variable t a la variable u . El factor $\phi'(t)$ que aparece en la integral de la izquierda puede verse como una relación entre los cambios de longitudes en la variable t y la variable u .

La teoría de integración en varias variables tiene muchos aspectos en común con la teoría de integración en una variable. En muchos casos, las demostraciones son casi idénticas. Sin embargo, hay algunas diferencias fundamentales. Por ejemplo, en una variable la integral se define y se calcula sobre un intervalo, pero en varias variables la región de integración puede tener una estructura muy complicada. En varias variables juega un papel importante el tamaño de la frontera de la región de integración, pero esa cuestión no es relevante en integración en una variable. En una variable, la fórmula para el cambio de variables en integración es muy sencilla y se demuestra casi directamente, aplicando la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo. Pero la fórmula para el cambio de variables en varias variables es mucho más elaborada; involucra al determinante de la diferencial del cambio de variables y su demostración es necesariamente extensa y técnicamente complicada.

Enunciaremos enseguida el teorema de integración por sustitución.

Teorema 5.1. (Cambio de variables) *Sea A un conjunto compacto con volumen contenido en un subconjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave, inyectiva, tal que ϕ' es no singular en A y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, acotada en $\phi(A)$ y continua en $\phi(A)$, excepto, posiblemente, en un subconjunto $E \subset \phi(A)$ con volumen cero. Entonces $\phi(A)$ es una región con volumen, f es integrable en $\phi(A)$, $f \circ \phi$ es integrable en A y*

$$\int_{\phi(A)} f(u) dv(u) = \int_A (f \circ \phi)(x) |\det \phi'(x)| dv(x). \quad (5.1)$$

Observación 5.1. Si denotamos $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$; $y_1 = \phi_1(x), \dots, y_n = \phi_n(x)$, y

$$\phi'(x) = \frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

entonces la conclusión del teorema puede escribirse así:

$$\int_{\phi(A)} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \int_A f(\phi(x_1, \dots, x_n)) \left| \frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| dx_1 \dots dx_n. \quad (5.2)$$

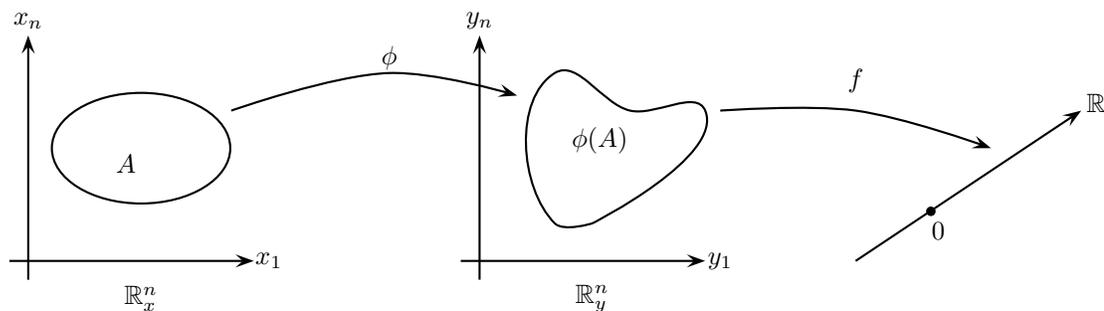


Figura 5.1: Representación diagramática del cambio de variables

La justificación intuitiva del teorema 5.1 es bastante sencilla. Sea S un rectángulo muy pequeño contenido en A . Entonces, como ϕ es un difeomorfismo, $g\phi$ es aproximadamente una aplicación afín en las proximidades de S , y $\phi(S)$ es aproximadamente un paralelepípedo. Si ϕ fuera realmente afín sobre S , el volumen de $\phi(S)$ sería $|\det \phi|v(S)$. Como la aplicación $y \mapsto g(x) + \phi'(x)(y - x)$ aproxima bien a ϕ cerca de x y es una aplicación afín, tendríamos que el volumen de $\phi(S)$ sería aproximadamente igual a $|\det \phi'|v(S)$, es decir, haciendo S cada vez más pequeño, tendríamos que estas cantidades infinitesimales coinciden:

$$f(\phi(x))|\det \phi'(x)| dx = f(y) dy,$$

luego, sumando todas estas cantidades infinitesimales (es decir, integrando), obtendríamos el resultado:

$$\int_A f(\phi(x))|\det \phi'(x)| dx = \int_{\phi(A)} f(y) dy.$$

Antes de analizar la demostración del teorema 5.1 expondremos un par de ejemplos.

Ejemplo 5.1. Usando el teorema del cambio de variables, hallar el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 1)$, y $\vec{v}_3 = (0, 1, 1)$ en \mathbb{R}^3 .

Solución. Sea B el paralelepípedo en \mathbb{R}_y^3 generado por \vec{v}_1, \vec{v}_2 y \vec{v}_3 , y sea A el paralelepípedo en \mathbb{R}_x^3 generado por los vectores $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ y $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. La transformación lineal

$\phi : A \rightarrow B = \phi(A)$ dada por $\phi(\vec{x}) = \mathcal{A}\vec{x}$ donde $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es obviamente un difeomorfismo \mathcal{C}^1

con $|\det \phi'(\vec{x})| = 2$ para toda \vec{x} . El volumen de B es $\int_B 1 \, dy = \iiint_B 1 \, dy_1 \, dy_2 \, dy_3$. Como $f(\vec{y}) = 1$, entonces $(f \circ \phi)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = 1$ y, por la fórmula (5.2) tenemos

$$v(B) = \iiint_B 1 \, dy_1 \, dy_2 \, dy_3 = \iiint_A 1 \cdot 2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 2. \quad \diamond$$

Ejemplo 5.2. Usando el cambio de variables $x = u + v, y = u - v$, calcular $\int_0^1 \int_y^1 (x + y) \, dx \, dy$.

Solución. La integral que se pide calcular se puede escribir como $\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$ donde $f(x, y) = x + y$ y B es la región en el plano $B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$.

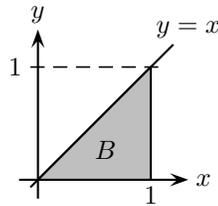


Figura 5.2: La región B del ejemplo 5.2

Con el cambio de variable sugerido construimos el mapeo $\phi : \mathbb{R}_{(u,v)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(x,y)}^2$:

$$\phi'(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (u + v, u - v)$$

y encontramos que la región A es el triángulo en el plano u, v con vértices $(0, 0) = \phi^{-1}(0, 0)$, $(1/2, 1/2) = \phi^{-1}(1, 0)$ y $(1, 0) = \phi^{-1}(1, 1)$. Además $\phi' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$

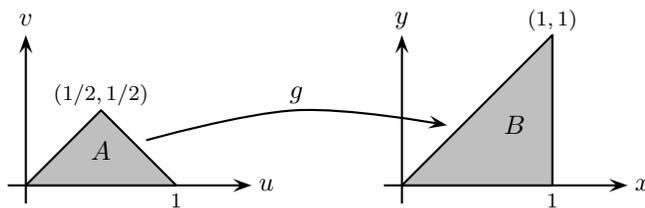


Figura 5.3: La región A , en las variables u, v

Entonces, por (5.2) encontramos

$$\begin{aligned} \int_B (x + y) \, dx \, dy &= \int_A \underbrace{(x(u, v) + y(u, v))}_{=2u} \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|}_{=2} \, du \, dv = 4 \int_A u \, du \, dv \\ &= 4 \left[\int_0^{1/2} \int_0^u u \, dv \, du + \int_{1/2}^1 \int_0^{-u+1} u \, dv \, du \right] = \frac{1}{2}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. Calcular $\iint_A f \, dx \, dy$ donde $f(x, y) = x + y$ y B es el rectángulo en el plano con vértices $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(3, 4)$ y $(4, 3)$.

Solución. La integral se puede calcular de varias maneras.

Una es la siguiente. Primero, usando el mapeo $F_1(x, y) = (x - 1, y)$, desplazamos el rectángulo B una unidad hacia la izquierda para obtener la región B_1 ; luego, usando el mapeo $F_2(x, y) = ((\cos \theta)x - (\sin \theta)y, (\sin \theta)x + (\cos \theta)y) = \left(\frac{x - y}{\sqrt{2}}, \frac{x + y}{\sqrt{2}}\right)$, rotamos el rectángulo B_1 un ángulo de $\theta = \pi/4$ en sentido positivo para obtener la región A .

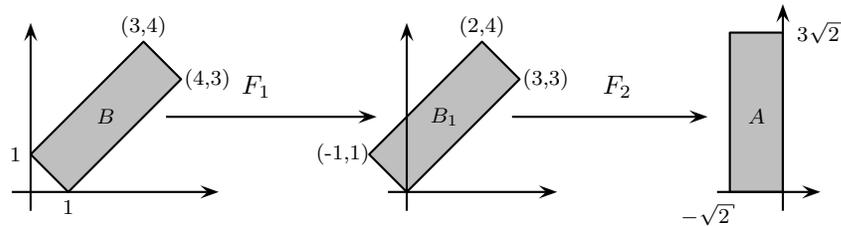


Figura 5.4: Cambio de variables para el ejemplo 5.3

Entonces el mapeo $\phi : A \rightarrow B$ que debemos usar en la fórmula (5.2) es

$$\phi = (F_2 \circ F_1)^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1}.$$

Como $F_1^{-1}(x, y) = (x + 1, y)$ y $F_2^{-1} = \left(\frac{x + y}{\sqrt{2}}, \frac{-x + y}{\sqrt{2}}\right)$, obtenemos

$$\phi(u, v) = F_1^{-1}(F_2^{-1}(u, v)) = F_1^{-1}\left(\frac{u + v}{\sqrt{2}}, \frac{-u + v}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{u + v}{\sqrt{2}} + 1, \frac{-u + v}{\sqrt{2}}\right) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Como $(f \circ \phi)(u, v) = \sqrt{2}v + 1$ y $|\phi'(u, v)| = 1$, usando (5.2) encontramos que

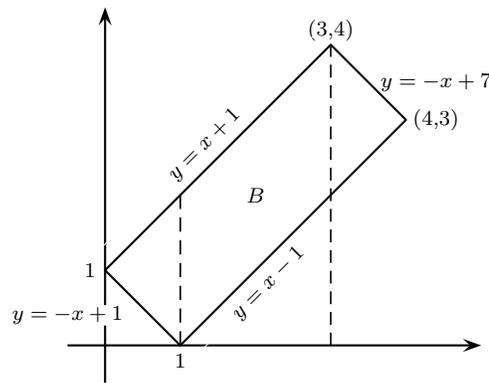
$$\begin{aligned} \iint_B (x + y) \, dx \, dy &= \iint_A (\sqrt{2}v + 1) \, du \, dv = \int_{-\sqrt{2}}^0 \int_0^{3\sqrt{2}} (\sqrt{2}v + 1) \, dv \, du \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \int_{-\sqrt{2}}^0 du \int_0^{3\sqrt{2}} (\sqrt{2}v + 1) \, dv = 24. \end{aligned}$$

En la igualdad $\textcircled{1}$ se ha usado el teorema de Fubini.

Otra manera de calcular la integral es usar directamente el corolario 3.1 (p. 45). Para esto necesitamos las ecuaciones de las rectas que delimitan el rectángulo B .

Encontramos, usando la fórmula (3.1) (p. 45), que

$$\begin{aligned} \iint_B (x + y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{-x+1}^{x+1} (x + y) \, dy \right) dx + \int_1^3 \left(\int_{x-1}^{x+1} (x + y) \, dy \right) dx \\ &+ \int_3^4 \left(\int_{x-1}^{-x+7} (x + y) \, dy \right) dx = 24. \quad \diamond \end{aligned}$$

Figura 5.5: Límites de la región B

5.1 Demostración de la fórmula del cambio de variables

Como advertimos al principio de este capítulo, la demostración del teorema 5.1 es extensa. Esto hace que sea conveniente avanzar por etapas, que presentaremos como lemas.

En la primera etapa consideramos la versión más elemental del teorema, que corresponde al caso en el que ϕ es lineal, $f = 1$ y A es un conjunto con volumen. Como podrá verse, aún en este caso la demostración no es inmediata. El resultado se presenta en el lema 5.4.

En los cursos elementales de álgebra lineal, al estudiar el método de eliminación gaussiana, se introducen tres operaciones, llamadas *elementales*, entre las filas de una matriz: a) intercambiar dos filas, b) multiplicar una fila por un número distinto de cero y c) sumar una fila con otra.

Una matriz se llama *elemental* si es el resultado de aplicar una de las operaciones elementales sobre las filas en una matriz identidad.

Denotaremos con

E_{ij} a la matriz que se obtiene al intercambiar las filas i y j ,

$T_i(a)$ a la matriz que se obtiene al multiplicar la i -ésima fila por $a \neq 0$ y con

S_{ij} a la matriz que se obtiene al sumar la j -ésima fila a la i -ésima fila; es decir, S_{ij} se obtiene agregando un 1 en la posición ij de la matriz identidad.

El determinante de las matrices elementales se calcula con toda facilidad.

Lema 5.1. Para cada i y para cada $j \neq i$, $\det E_{ij} = 1$, $\det S_{i,j} = 1$ y $\det T_i(a) = a$.

Nótese que la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental o un producto de matrices elementales.

Si A es una matriz cuadrada de tamaño n , $E_{ij}A$ es el resultado de intercambiar las filas i y j de A , dejando sin cambio las demás filas; $S_{ij}A$ es el resultado de remplazar la i -ésima fila de A por la suma de las filas i y j , dejando todas las demás filas (excepto la i -ésima) sin cambio; y $T_i(a)A$ es el resultado de multiplicar la i -ésima fila de A por a , dejando las demás filas sin cambio.

Lema 5.2. *Toda matriz A de tamaño $n \times n$, no singular, es el producto de matrices de la forma $E_{i,j}, S_{ij}, T_i(a)$.*

Demostración. El proceso de eliminación gaussiana de la matriz A consiste en multiplicar de manera sucesiva la matriz A por la izquierda por matrices elementales hasta que se obtiene una matriz en forma escalonada reducida. Si la matriz A es no singular, esta matriz escalonada reducida es precisamente la matriz identidad. De manera que para una matriz no singular A , de tamaño $n \times n$, existe una matriz B que es el producto de matrices elementales y que satisface $BA = I$. Entonces $A^{-1} = B$. \square

Observación 5.2. *Como el determinante es multiplicativo ($\det(AB) = \det A \det B$ para cualesquiera matrices A y B de tamaño $n \times n$) se sigue que el determinante de una matriz no singular es el producto de los factores de escala a de las matrices $T_i(a)$ que aparecen en la factorización como producto de matrices elementales.*

Sea A un conjunto con volumen. Algunas transformaciones lineales no modifican el volumen de A . Una transformación lineal que transforma rectángulos en rectángulos con el mismo volumen no cambia el volumen de A . La transformación lineal asociada con la matriz elemental E_{ij} tiene esta propiedad. Una matriz S_{ij} también preserva el volumen de A , aunque esta afirmación requiere ser demostrada.

Lema 5.3. *Sea A un conjunto con volumen. Entonces $v(S_{ij}A) = v(A)$.*

Demostración. Si $A = [a, b] \times [c, d]$ es un rectángulo en \mathbb{R}^2 la afirmación del teorema es directa. $S_{12}A$ es un paralelogramo con vértices $(a + c, c)$, $(b + c, c)$, $(b + d, d)$ y $(a + d, d)$. La longitud de la base de este paralelogramo es $(b + c) - (a + c) = b - a$ y la altura es $d - c$. Entonces su área es $(b - a)(d - c)$, que es la misma que la de A .

Si A es un rectángulo en \mathbb{R}^n con $n > 2$, entonces A es de la forma $A = S \times T$ donde S es un rectángulo en \mathbb{R}^2 y T es un rectángulo en \mathbb{R}^{n-2} . La matriz S_{12} en \mathbb{R}^n transforma $S \times T$ en $P \times T$ donde, por el caso particular anterior, P es un paralelogramo con área igual que la de S . Entonces S_{12} transforma A en un conjunto con el mismo volumen que A . Dado que para cualesquiera $i \neq j$ S_{ij} es la composición de S_{12} con algunas matrices E_{kl} , se concluye que transforma el conjunto A en un conjunto con el mismo volumen.

En el caso general, sean A un conjunto con volumen, R un rectángulo que contiene a A y P una partición de R . Sean R_1, R_2, \dots, R_N los subrectángulos de R determinados por la partición P .

Sean

$$\begin{aligned} E &= \bigcup \{R_k : R_k \subset A\}, \\ F &= \bigcup \{R_k : R_k \cap A \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

Entonces $U(\chi_A, P) = v(F)$ y $L(\chi_A, P) = v(E)$. Como A es conjunto con volumen, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P tal que $v(F) - v(E) < \varepsilon$. Por su puesto, independientemente de la partición P , se tiene

$$v(E) \leq v(A) \leq v(F). \quad (5.3)$$

Nótese que $S_{ij}F$ es la unión de aquellos $S_{ij}R_k$ que satisfacen $R_k \cap A \neq \emptyset$, y cualesquiera dos de estos conjuntos o son ajenos o se intersectan en un conjunto de volumen cero. Como $v(S_{ij}R_k) = v(R_k)$, concluimos que

$$v(S_{ij}F) = v(F).$$

Con un argumento similar se demuestra que

$$v(S_{ij}E) = v(E).$$

Por tanto,

$$v(E) = v(S_{ij}E) \leq \int_{\underline{R}} \chi_{S_{ij}A} \leq \int_{\overline{R}} \chi_{S_{ij}A} \leq v(S_{ij}F) = v(F). \quad (5.4)$$

Como $v(F) - v(E) < \varepsilon$, se concluye que

$$\int_{\overline{R}} \chi_{S_{ij}A} - \int_{\underline{R}} \chi_{S_{ij}A} < \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario se sigue que $\int_{\overline{R}} \chi_{S_{ij}A} = \int_{\underline{R}} \chi_{S_{ij}A}$. Esto prueba que $S_{ij}A$ es un conjunto con volumen. De (5.3) y de (5.4) se sigue que $v(S_{ij}A) = v(A)$. \square

Lema 5.4. Si $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal y A es un conjunto con volumen, entonces $L(A)$ es una región con volumen y $v(L(A)) = |\det L|v(A)$, donde $\det L$ denota el determinante de la matriz asociada a L .

Demostración. Notemos primero que si el teorema es válido para las transformaciones lineales L_1 y L_2 , entonces es válido para la composición $L_1 \circ L_2$, pues

$$\begin{aligned} v((L_1 \circ L_2)(A)) &= |\det L_1|v(L_2(A)) \\ &= |\det L_1||\det L_2|v(A) = |\det L_1L_2|v(A). \end{aligned}$$

Las matrices elementales E_{ij} y S_{ij} no afectan el volumen, pues tienen determinante ± 1 . Entonces, la conclusión del teorema es válida para estas transformaciones.

Una matriz $T_i(a)$ transforma un rectángulo en un rectángulo con lados de la misma longitud, excepto por el i -ésimo lado, cuya longitud se multiplica por $|a|$. Así que cada rectángulo es transformado en un rectángulo, cuyo volumen es $|a|$ veces el volumen original. Así que $T_i(a)$ transforma un conjunto con volumen en un conjunto, cuyo volumen es $|a|$ veces el volumen del rectángulo original. Como $a = \det T_i(a)$, el teorema es válido para transformaciones $T_i(a)$.

Como cada matriz $n \times n$ singular es el producto de matrices E_{ij} , S_{ij} y $T_i(a)$, el teorema es válido para transformaciones lineales de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n .

Si L es singular, entonces su determinante es cero. En este caso $L(A)$ está contenido en un subespacio de \mathbb{R}^n de dimensión estrictamente menor que n . Luego, $L(A)$ tiene volumen cero y la igualdad $v(L(A)) = |\det L|v(A)$ es trivialmente cierta. \square

Lema 5.5. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función inyectiva de clase \mathcal{C}^1 . Supongamos que $\phi'(x)$ es no singular para cada $x \in U$. Si R es un rectángulo con volumen cero contenido en U , entonces $\phi(R)$ es un conjunto con volumen cero en \mathbb{R}^n .

Demostración. Como R tiene volumen cero, entonces R es un rectángulo de dimensión a lo más $n - 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que está contenido en $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_n = 0\}$. Sea $a \in R$. Demostraremos primero que existe una vecindad de $b = \phi(a)$ cuya intersección con $\phi(R)$ tiene volumen cero. Si es posible hacer esto para cada $a \in R$, entonces como $\phi(R)$ es compacto, podremos cubrir $\phi(R)$ con una cantidad finita de conjuntos abiertos, cuyas intersecciones con $\phi(R)$ tienen volumen cero. Se concluirá de aquí que $\phi(R)$ tiene volumen cero.

Como las translaciones no modifican el volumen podemos suponer que tanto a como $b = \phi(a)$ son cero (es decir, el origen de coordenadas). También, como al aplicar una transformación lineal no singular a un conjunto con volumen cero se obtiene un conjunto de volumen cero, podemos sustituir ϕ por $(\phi'(0))^{-1}\phi$. Es decir, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\phi'(0) = I$.

Si $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ y si representamos los puntos de \mathbb{R}^n con (x, y) donde $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $y \in \mathbb{R}$, entonces definimos $g : U \cap \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ mediante

$$g(x) = (\phi_1(x, 0), \dots, \phi_{n-1}(x, 0)).$$

Entonces

$$\phi'(0) = \left(\begin{array}{c|c} g'(0) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

por lo que $g'(0)$ es la transformación identidad. El teorema de la función inversa implica que existen vecindades V y W de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, tales que $g : V \rightarrow W$ es sobreyectiva y tiene inversa suave $g^{-1} : W \rightarrow V$. Entonces

$$\phi(g^{-1}(0), 0) = (x, \phi_n \circ g^{-1}(x)), \quad x \in W.$$

Esto significa que la parte de $\phi(R)$, que consiste de aquellos puntos cuya primera coordenada está en W es la gráfica de la función suave $\phi_n \circ g^{-1}$. Por el ejemplo 2.2 (p. 25), concluimos que tiene volumen cero. \square

Lema 5.6. Supongamos que $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface las hipótesis del lema 5.5. Si R es un rectángulo en U , entonces $\phi(R)$ es un conjunto con volumen.

Demostración. Si R es un rectángulo en U , entonces su frontera es la unión de una cantidad finita de rectángulos de dimensión $n - 1$. La imagen bajo ϕ de cada uno de estos rectángulos tiene volumen cero, por el lema 5.5. Por tanto, $\phi(\partial R)$ tiene volumen cero. Si probamos que $\partial\phi(R) = \phi(\partial R)$, habremos probado el teorema.

La imagen de ϕ es un conjunto abierto V y $\phi : U \rightarrow V$ es biyectiva. Entonces ϕ tiene una inversa $\phi^{-1} : V \rightarrow U$ que, por el teorema de la función inversa, es suave. En particular, es continua. Como ϕ y ϕ^{-1} son continuas, un subconjunto $A \subset U$ es abierto si y solo si su imagen $\phi(A) \subset V$ es abierto. Se sigue que ϕ transforma el interior de R en el interior de $\phi(R)$ y, por tanto, la frontera de R en la frontera de $\phi(R)$. \square

Sea R un rectángulo en \mathbb{R}^n . Llamaremos *razón de aspecto* de R al número $\frac{\ell_{\min}}{\text{diam}(R)}$, donde ℓ_{\min} es la longitud del lado más corto de R y $\text{diam}(R)$ es el diámetro de R (es decir, la mayor distancia posible entre dos puntos de R).

Lema 5.7. Sean U abierto en \mathbb{R}^n y $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo suave e inyectivo. Supongamos que $\phi'(a)$ es no singular y que $|\phi'(a)| \leq K$ para alguna $K > 0$ y para toda $a \in U$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si R es un rectángulo en U con $\text{diam}(R) < \delta$ y razón de aspecto al menos λ , entonces $|v(\phi(R)) - v(\phi'(a)R)| < \varepsilon v(R)$, donde a es el centro del rectángulo R .

Demostración. Sea R un rectángulo en U con $\text{diam}(R) < \delta$, que será determinado más adelante, y razón de aspecto $\rho \geq \lambda$. Nótese que, por el lema 5.6, $\phi(R)$ es un conjunto con volumen. Como una translación no afecta el volumen, podemos suponer que el centro de R es 0 y que $\phi(0) = 0$. Por hipótesis,

$$|\det \phi'(0)| \leq K. \quad (5.5)$$

Si $0 < \rho < 1$, entonces denotaremos con $(1 + \rho)R$ al rectángulo que se obtiene expandiendo cada uno de los lados del rectángulo R de manera simétrica, con respecto al centro por un factor $(1 + \rho)$. De manera similar construimos el rectángulo $(1 - \rho)R$. Nótese que

$$(1 - \rho)R \subset R \subset (1 + \rho)R,$$

y, como $\phi'(0)$ es lineal

$$(1 - \rho)\phi'(0)R \subset \phi'(0)R \subset (1 + \rho)\phi'(0)R.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} v((1 + \rho)\phi'(0)R) & - v((1 - \rho)\phi'(0)R) \\ & = ((1 + \rho)^n - (1 - \rho)^n)v(\phi'(0)R) \\ & \stackrel{\textcircled{1}}{=} ((1 + \rho)^n - (1 - \rho)^n)|\phi'(0)|v(R) \\ & \stackrel{\textcircled{2}}{\leq} 2\rho n(1 + \rho)^{n-1}|\phi'(0)|v(R) \\ & \stackrel{\textcircled{3}}{\leq} n 2^n \rho K v(R). \end{aligned} \quad (5.6)$$

En $\textcircled{1}$ se ha usado el lema 5.4 (p. 71); en $\textcircled{2}$ se ha usado la desigualdad $(1 + \rho)^n - (1 - \rho)^n \leq 2nx(1 + x)^{n-1}$, que se puede probar por inducción; y en $\textcircled{3}$ se ha usado (5.5) (y el hecho de que $1 + \rho < 2$). Si escogemos

$$\rho = \frac{\varepsilon}{n 2^n K},$$

entonces, de (5.6) se sigue que

$$v((1 + \rho)\phi'(0)R) - v((1 - \rho)\phi'(0)R) \leq \varepsilon v(R).$$

La prueba estará completa si podemos probar que, para δ suficientemente pequeño, cualquier rectángulo R que contenga al origen y que satisfaga $\text{diam}(R) < \delta$, satisface

$$(1 - \rho)\phi'(0)R \subset \phi(R) \subset (1 + \rho)\phi'(0)R, \quad (5.7)$$

pues estas contenciones se siguen satisfaciendo si se sustituye $\phi(R)$ por $\phi'(0)R$.

Si $x \neq 0$ es cualquier vector en \mathbb{R}^n , entonces

$$|x| = |(\phi'(0))^{-1}\phi'(0)x| \leq |(\phi'(0))^{-1}||\phi'(0)x|.$$

Así, $|\phi'(0)x| \geq |(\phi'(0))^{-1}|^{-1}|x|$. Esto implica que si L es cualquier segmento de recta en \mathbb{R}^n , entonces, la longitud del segmento de recta $\phi'(0)L$ es por lo menos la longitud del segmento L multiplicada por el factor $A = 1/|(\phi'(0))^{-1}|$. Se sigue que la distancia de $\phi'(0)R$ al complemento de $(1 + \rho)\phi'(0)R$ es por lo menos $A\rho r$, donde r es la mitad de la longitud del lado más corto de R . Por definición de la diferencial $\phi'(0)$, podemos escoger δ tal que si $|x| < \delta$ y $x \in R$, se tiene

$$|\phi(x) - \phi'(0)x| < A\rho\lambda|x| < A\rho r.$$

Esto implica que $\phi(x) \in (1 + \rho)\phi'(0)R$. Con un argumento similar se demuestra que, con δ tomado como antes y $x \in R$, se tiene $(1 - \rho)\phi'(0)x \in \phi(R)$. Por tanto, (5.7) se satisface si $\text{diam}R < \delta$. \square

Lema 5.8. *Sea U un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n y $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación inyectiva con ϕ' no singular en U . Sea R un rectángulo en U y f una función continua en $\phi(R)$. Entonces*

$$\int_{\phi(R)} f(u) dv(u) = \int_R f(\phi(x))|\phi'(x)| dv(x).$$

Demostración. Para cada subrectángulo S de R hagamos

$$\Delta(S) = \int_{\phi(S)} f(u) dv(u) - \int_S f(\phi(x))|\det \phi'(x)| dv(x), \quad Q(S) = \frac{\Delta(S)}{v(S)}.$$

Probaremos que $Q(R) = 0$, lo que implicará que $\Delta(R) = 0$, que es precisamente la conclusión del lema.

Sean $h = \text{diam}(R)$ y $R_0 = R$. Construiremos, de manera inductiva, una sucesión $\{R_j\}_{j=0}^{\infty}$ de subrectángulos de R , anidados de manera tal que $\text{diam}(R_j) = \frac{h}{2^j}$ y $|Q(R_j)| \geq |Q(R)|$.

Supongamos que ya hemos construido los subrectángulos R_0, \dots, R_m y que $R_m = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Diremos cómo construir R_{m+1} . Primero partimos cada intervalo $[a_k, b_k]$ en dos subintervalos de la misma longitud, induciendo así una partición de R_m que contiene 2^n subintervalos, cada uno de los cuales tiene diámetro $h/2^{m+1}$, pues, por hipótesis, $\text{diam}(R_m) = h/2^m$. Sea $\{S_1, \dots, S_N\}$ una

lista de estos subrectángulos de R_m . Entonces $R_M = \bigcup_{j=1}^N S_j$ y

$$\Delta(R_m) = \sum_{j=1}^N \Delta(S_j) = \sum_{j=1}^N Q(S_j)v(S_j).$$

Ahora, para al menos uno de los subrectángulos S_j debe ocurrir que $|Q(S_j)| \geq |Q(R_m)|$, pues si $|Q(S_j)| < |Q(S_m)|$ para todo j , entonces

$$\Delta(R_m) = \sum_{j=1}^N Q(S_j)v(S_j) < \sum_{j=1}^N Q(R_m)v(S_j) = Q(R_m)v(R_m) = \Delta(R_m),$$

lo que es imposible. Así que $|Q(S_j)| \geq |Q(R_m)|$ para, al menos, un j . Entonces escojemos R_{m+1} como uno de los subrectángulos S_j que satisfaga esta desigualdad. Repitiendo este procedimiento, es posible construir una sucesión $\{R_1, R_2, \dots\}$ de subrectángulos con las propiedades descritas.

Como $\{R_j\}_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión de rectángulos compactos anidados, tiene intersección no vacía. Sea $a \in \bigcap_{j=0}^{\infty} R_j$. Como ϕ es suave, existe una vecindad V de a tal que $|\det \phi'(x)| < K$ para alguna

constante positiva K y para todo $x \in V$. Si λ es la razón de aspecto de R , entonces la razón de aspecto de cada rectángulo R_j es λ . Por el lema 5.7 existe un $\delta > 0$ tal que para cada rectángulo R en V con razón de aspecto al menos λ y diámetro menor que δ se satisface

$$|v(\phi(R)) - v(\phi'(b)R)| < \varepsilon v(R),$$

donde b es el centro de R . Estas condiciones se satisfarán para todo $R_j \subset B_\delta(a)$. Denotemos con a_j el centro de R_j . Si escogemos δ tal que para todos $x, y \in B_\delta(a)$ se satisfaga

$$|f(\phi(x)) - f(\phi(y))| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left| f(\phi(x))|\phi'(x)| - f(\phi(y))|\phi'(y)| \right| < \varepsilon,$$

entonces

$$\begin{aligned} |\Delta(R_j)| &= \left| \int_{\phi(R_j)} f(u) dv(u) - \int_{R_j} f(\phi(x))|\phi'(x)| dv(x) \right| \\ &\leq \left| \int_{\phi(R_j)} f(\phi(a_j)) dv(u) - \int_{R_j} f(\phi(a_j))|\phi'(a_j)| dv(x) \right| \\ &\quad + \int_{\phi(R_j)} |f(u) - f(\phi(a_j))| dv(u) \\ &\quad + \int_{R_j} \left| f(\phi(x))|\phi'(x)| - f(\phi(a_j))|\phi'(a_j)| \right| dv(x) \\ &\leq |f(\phi(a_j))||v(\phi(R_j)) - v(\phi'(a_j)R_j)| + \varepsilon v(\phi(R_j)) + \varepsilon v(R_j). \end{aligned}$$

Como $|v(\phi(R_j)) - v(\phi'(a_j)R_j)| < \varepsilon v(R_j)$ y $v(\phi'(a_j)R_j) = |\det \phi'(a_j)|v(R_j)$, se sigue que

$$|\Delta(R_j)| \leq \varepsilon v(R_j) \left(|f(\phi(a_j))| + |\det \phi'(a_j)| + \varepsilon + 1 \right).$$

Como ε es arbitrario y $\phi(a_j) \rightarrow \phi(a)$ y $\phi'(a_j) \rightarrow \phi'(a)$ cuando $j \rightarrow \infty$, se sigue que $Q(R_j) = \Delta(R_j)/v(R_j)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, tomando j suficientemente grande. Como $Q(R) \leq Q(R_j)$ para todo $j = 0, 1, 2, \dots$, concluimos que $Q(R) = 0$. \square

Observación 5.3. Si tomamos $f(u) = 1$ para toda $u \in U$ en el lema 5.8 se tiene que

$$v(\phi(R)) = \int_R |\phi'(x)| dv(x).$$

Y si suponemos, además, que $M = \sup_{x \in R} |\phi'(x)|$ y que $m = \inf_{x \in R} |\phi'(x)|$, entonces, por el teorema 1.3(iii) (p. 18), se tiene que

$$m v(R) \leq v(\phi(R)) \leq M v(R).$$

Observación 5.4. De la observación hecha en 5.3 se sigue que si $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función inyectiva con ϕ' no singular en U y si $K \subset U$ es compacto y $v(K) = 0$, entonces $v(\phi(K)) = 0$.

Ahora podemos probar la fórmula general para el cambio de variables.

Demostración del teorema 5.1 (p. 65). Sea $V = \phi(U)$. Por el teorema de la función inversa, V es abierto y $\phi^{-1} : V \rightarrow U$ es suave con ϕ' no singular. Como A es un conjunto con volumen, se sigue que ∂A es un conjunto con volumen cero. Como ϕ y ϕ^{-1} son continuas, $\partial\phi(A) = \phi(\partial A)$. Entonces $\partial(\phi A)$ es también un conjunto con volumen cero (por la observación 5.4) y, por tanto, $\phi(A)$ es un conjunto con volumen. Podemos extender f de manera que tome el valor 0 en $(\phi(A))^c$ en V , y seguirá siendo una función continua, excepto en un conjunto de volumen cero. Por el corolario 2.2 (p. 37) f es integrable en $\phi(A)$.

Sea K la cerradura de $\partial\phi(A) \cup E$. Entonces f , extendida a cero en $\phi(A)^c$, es continua en K^c . Como $v(K) = 0$, de la observación 5.4 se concluye que $v(\phi^{-1}(K)) = 0$. Como $f \circ \phi$ es continua en U , excepto en los puntos de $\phi^{-1}(K)$, se sigue que $f \circ \phi$ es integrable en A .

Sea $\varepsilon > 0$. Sea R un rectángulo que contenga a A y sea P una partición de R . Sea R_1, R_2, \dots, R_N la lista de subrectángulos de P que están contenidos en U . Si P es suficientemente fina, entonces

ocurrirá que $A \subset \bigcup_{j=1}^N R_j$. Además, la partición P puede escogerse lo suficientemente fina como para que si $S = \{j : R_j \cap K = \emptyset\}$, entonces

$$\sum_{j \in S} v(R_j) < \varepsilon.$$

Si $K \cap R_j = \emptyset$, entonces $A \cap R_j = \emptyset$ o R_j es un rectángulo contenido en el interior de A y f es continua en $\phi(R)$. En el segundo caso tenemos

$$\int_{\phi(R_j)} f(u) dv(u) = \int_{R_j} f(\phi(x)) |\det \phi'(x)| dv(x).$$

Como f es cero en $\phi(A)^c$, tenemos

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\phi(A)} f(u) \, dv(u) - \int_A f(\phi(x)) |\det \phi'(x)| \, dv(x) \right| \\
 &= \left| \sum_j \left(\int_{\phi(R_j)} f(u) \, dv(u) - \int_{R_j} f(\phi(x)) |\det \phi'(x)| \, dv(x) \right) \right| \\
 &= \left| \sum_{j \in S} \left(\int_{\phi(R_j)} f(u) \, dv(u) - \int_{R_j} f(\phi(x)) |\det \phi'(x)| \, dv(x) \right) \right| \\
 &\leq \sum_{j \in S} \left(M \, dv(u) + \int_{R_j} MK \, dv(x) \right) \\
 &= \sum_{j \in S} (Mv(\phi(R_j)) + MKv(R_j)) \leq 2MK\varepsilon,
 \end{aligned}$$

donde $M = \sup\{|f(\phi(x))|, x \in A\}$ y $K = \sup\{|\det \phi'(x)|, x \in A\}$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce de aquí la igualdad (5.1) (p. 65) del teorema de cambio de variable. \square

Un corolario inmediato, que se obtiene al tomar $f(x) = 1$ para toda $x \in U$, es el siguiente.

Corolario 5.1. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con volumen y sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función que satisfice las hipótesis del teorema 5.1 (p. 65). Entonces*

$$v(\phi(U)) = \int_U |\phi'(x)| \, dv(x).$$

Hay algunos cambios de variable que son particularmente útiles en multitud de situaciones prácticas y que por ello merecen una atención especial. Los cambios a coordenadas polares, esféricas o cilíndricas son algunos de los más empleados.

5.2 Coordenadas polares

Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \quad (5.8)$$

Aunque ϕ es diferenciable de clase \mathcal{C}^∞ , no es inyectiva en todo \mathbb{R}^2 . Sin embargo, si la restringimos al abierto $U = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, entonces sí que es inyectiva, y su jacobiano es

$$\det \phi'(r, \theta) = \left| \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r > 0$$

en todo este conjunto U ; luego, por el teorema de la función inversa, $\phi : U \rightarrow g(U)$ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^∞ ; se comprueba inmediatamente que $\phi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\})$. Es decir, ϕ transforma difeomórficamente la banda abierta U sobre todo el plano, excepto los puntos de la

recta $y = 0$ con coordenada x positiva. Como dichos puntos forman un subconjunto de medida cero de \mathbb{R}^2 , estos puntos no afectan al valor de las integrales a las que se aplique el cambio de variables ϕ (ver el teorema 5.1, p. 65) y, para el de cálculo de integrales, podemos proceder como si ϕ fuera una biyección definida de la banda cerrada $U = \{(r, \theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, sobre todo el plano \mathbb{R}^2 . De esta manera, si B es cualquier subconjunto con volumen de \mathbb{R}^2 , y $A = \phi^{-1}(B)$, al aplicar el teorema del cambio de variables a la transformación g (y teniendo en cuenta las observaciones anteriores), se obtiene la siguiente fórmula:

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_A f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (5.9)$$

Ejemplo 5.4. Sea $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Aplicar el cambio de variables a coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ para hallar

$$\int_B e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Solución. La región A que es transformada por ϕ en el círculo unitario B es $A = \{(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]\}$.

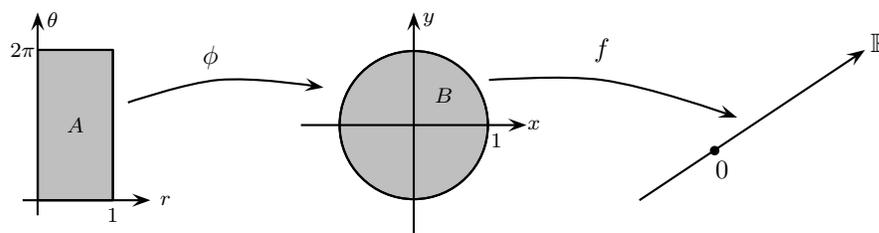


Figura 5.6: La región de integración A para el ejemplo 5.4

Como $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = e^{-r^2}$; entonces, usando la fórmula (5.9), obtenemos

$$\int_B e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_A e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi \left(1 - \frac{1}{e}\right). \quad \diamond$$

Ejemplo 5.5. Calcular $\int_B \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ donde $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) : x + y \geq 1\}$.

Solución. En la figura 5.7(a) se muestra la región B . Para cada $\theta \in [0, \pi/2]$, el radio r va del punto P al punto Q . Como el punto P está sobre la recta $x + y = 1$, entonces las coordenadas de P satisfacen $r \cos \theta + r \sin \theta = 1$, por lo que $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$. En Q $r = 1$. La región A en el plano (r, θ) , que es enviada a la región B mediante la transformación (5.8), es, por tanto,

$A = \left\{ (r, \theta) \in \left[\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}, 1 \right] \times \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$. Aplicando (5.9) encontramos que

$$\begin{aligned} \int_B \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_A \frac{1}{(r^2)^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 \frac{1}{(r^2)^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 \frac{1}{r^3} dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}. \quad \diamond \end{aligned}$$

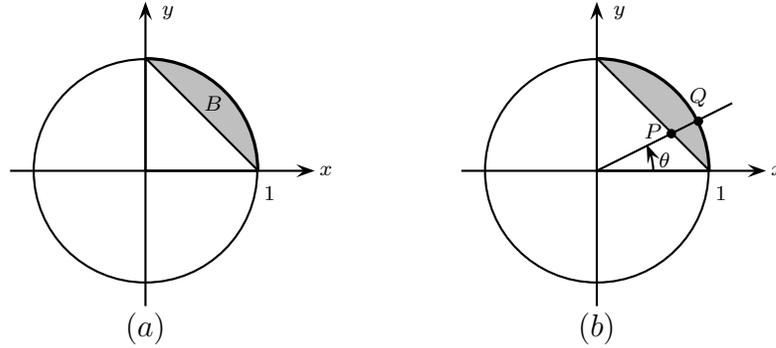


Figura 5.7: La región de integración para el ejemplo 5.5

5.3 Coordenadas esféricas

Sea ahora $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$\phi(r, \varphi, \theta) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi). \tag{5.10}$$

Como sucedía en el caso de las coordenadas polares, ϕ es suave, pero no es inyectiva en todo \mathbb{R}^3 . No obstante, restringiéndola al abierto $U = \{(r, \varphi, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$, ϕ sí es inyectiva, y

$$\det \phi'(r, \varphi, \theta) = \left| \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin \varphi > 0$$

en cada $(r, \varphi, \theta) \in U$, luego, por el teorema de la función inversa, $\phi : U \rightarrow g(U)$ es un difeomorfismo. Se ve fácilmente que $\phi(U) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0\}$. Es decir, ϕ transforma difeomórficamente

la banda abierta U sobre todo el espacio \mathbb{R}^3 , excepto los puntos del plano $y = 0$ con coordenada x positiva. Pero dichos puntos forman un subconjunto de medida cero de \mathbb{R}^3 , luego estos puntos no afectan al valor de las integrales a las que se aplique el cambio de variables ϕ y, como en el caso de las coordenadas polares, para calcular integrales podemos hacer como si ϕ fuera una biyección definida de $B = \{(r, \varphi, \theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ sobre todo \mathbb{R}^3 . En este caso, si B es cualquier subconjunto con volumen de \mathbb{R}^3 , y $A = \phi^{-1}(B)$, aplicando el teorema del cambio de variables a g , obtenemos la siguiente fórmula:

$$\int_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_A f(r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \varphi) r^2 \operatorname{sen} \varphi dr d\varphi d\theta. \quad (5.11)$$

Ejemplo 5.6. Sea B la bola unidad de \mathbb{R}^3 . Calcular las integrales

$$(a) \int_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}} \quad (b) \int_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz$$

Solución. (a) Como $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$, obtenemos que

$$f(r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2+r^2}}.$$

Como B es la esfera unidad (completa), entonces $A = \{(r, \varphi, \theta) : 0 < r < 1, 0 < \varphi < \pi, 0 < \theta < 2\pi\}$. Entonces, usando (5.11) encontramos

$$\begin{aligned} \int_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}} &= \int_A \frac{r^2 \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{2+r^2}} dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{2+r^2}} dr d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \left(\int_0^1 \frac{r^2 dr}{\sqrt{2+r^2}} \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \right) \\ &= 2\pi \left(\sqrt{3} - 2\operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz &= \int_A e^{r^3} r^2 \operatorname{sen} \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{r^3} r^2 \operatorname{sen} \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= 2\pi^2 \int_0^1 e^{r^3} r^2 dr = \frac{2}{3}(e-1)\pi^2. \quad \diamond \end{aligned}$$

5.4 Coordenadas cilíndricas

El cambio a coordenadas cilíndricas consiste en hacer un cambio a polares en las coordenadas x , y de cada punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, mientras que la coordenada z permanece fija. La transformación adecuada es pues

$$\phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z), \quad (5.12)$$

donde ϕ está definida en el abierto $U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, y su imagen es todo \mathbb{R}^3 , excepto los puntos del plano $y = 0$ con coordenada $x \geq 0$ (puntos que forman un subconjunto de medida cero de \mathbb{R}^3). En este caso $\det \phi'(r, \theta, z) = r > 0$ en U . Así, si B es cualquier subconjunto con volumen de \mathbb{R}^3 , y $A = \phi^{-1}(B)$, tenemos la siguiente fórmula de cambio de variables:

$$\int_B f(x, y) dx dy dz = \int_A f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r dr d\theta dz. \quad (5.13)$$

Ejemplo 5.7. Calcular $\int_D e^{-x^2-y^2} dx dy dz$, donde $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Solución.

$$\begin{aligned} \int_D e^{-x^2-y^2} dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-r^2} r dr d\theta dz \\ &= \left(\int_0^1 dz \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 e^{-r^2} r dr \right) \\ &= 2\pi \int_0^1 e^{-r^2} r dr = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right). \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 5.8. Calcular $\int_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, donde $D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$.

Solución.

$$\begin{aligned} \int_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} z r^2 dr d\theta dz \\ &= \left(\int_0^1 z dz \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_1^{\sqrt{2}} r^2 dr \right) = \frac{\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1). \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9. Hallar el valor de $\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x^2 + y^2) dx dy dz$.

Solución. La región de integración es $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{x^2 + y^2} \leq x \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$, que, en coordenadas cilíndricas es $E = \{(r, \theta, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \int_D z(x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_E zr^3 dr d\theta dz \\ &= \left(\int_0^1 z dz \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 r^3 dr \right) = \frac{\pi}{4}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejercicios

5.1. Determinar el área de la región acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$ e $y = 2x^2$, por medio del cambio de variables $u = xy$, $v = y/x^2$.

5.2. Hallar el volumen de la región determinada por la intersección del cono sólido $z^2 \geq x^2 + y^2$ y la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

5.3. Usar coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido T limitado superiormente por el plano $z = y$ e inferiormente por el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

5.4. Demostrar que el volumen de un cono circular de radio de la base r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

5.5. Calcular

$$\int_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

donde D es la bola unidad de \mathbb{R}^3 .

5.6. Utilizando coordenadas polares, calcular las integrales:

(a) $\int_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $\int_D |x + y| dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $\int_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(d) $\int_D (x^2 + y^2)^{-3} dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$.

5.7. (a) Hallar el área limitada por las curvas en polares: $\rho = a \cos \theta$ y $\rho = a(1 + \cos \theta)$; ($a > 0$).

(b) Hallar el área limitada por la curva en polares: $\rho = a|\sin 3\theta|$; ($a > 0$).

(c) Hallar el área limitada por la lemniscata: $(x^2 + y^2)^2 = 2a(x^2 - y^2)$; ($a > 0$).

5.8. Se considera la transformación $\varphi(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$; sea $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9, u \geq 0, v \geq 0\}$. Determinar el conjunto $\varphi(D)$ y calcular su área.

Sugerencia: ¿Qué es $\varphi(z)$ cuando $z = u + iv$ es un número complejo?

5.9. Se considera la transformación $\varphi(u, v) = (x = u + v, y = v - u^2)$; sea D el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$ en el plano (u, v) . Comprobar que φ es un cambio de variables alrededor de D . Determinar el conjunto $\varphi(D)$ y calcular su área.

5.10. Utilizando cambios de variable, calcular:

(a) $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$.

(b) $\int_D \frac{x}{4x^2 + y^2} dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(c) $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 1, |y| \geq 1\}$.

5.11. Calcular: (a) $\int_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2z \leq 4\}$.

(b) $\int_V z dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

(c) $\int_V z(x + y) dx dy dz$, donde V está limitado por: $z = 0, z = a, xy = a^2, 2(x + y) = 5a, (a > 0)$.

(d) $\int_V e^x dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(e) $\int_V z \operatorname{sen}(x^2 + y^2) dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}, (R > 0)\}$.

(f) $\int_V |z| dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq x^2\}$.

(g) $\int_V (x^2 + y^2 + z^2)^{-2} dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$.

5.12. Calcular el volumen de los cuerpos siguientes:

(a) El cuerpo limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$.

(b) El cuerpo limitado por la superficie $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 2$ y $z = 4$.

(c) El cuerpo limitado por una esfera de radio R y un cono de ángulo en el origen 2α , si el vértice del cono está en el centro de la esfera.

(d) El cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$.

(e) El cuerpo limitado por las superficies $x + y = z; xy = 1, y = x, y = 2x, z = 0$.

5.13. Calcular, mediante una transformación previa de coordenadas, las integrales:

(a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx$ (a cilíndricas).

(b) $\int_0^{2R} \int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz dy dx$ (a esféricas).

5.14. Hacer un cambio de variables a coordenadas polares y usar los teoremas sobre integrales impropias para calcular $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Después, utilizar el teorema de Fubini para probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

5.15. Enunciar y probar una versión del teorema del cambio de variables para difeomorfismos C^1 entre abiertos posiblemente no acotados e integrales impropias.

5.16. ¿Para qué valores de p es la función

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^p$$

integrable sobre B , donde B es la bola unidad de \mathbb{R}^3 ? ¿Para cuáles lo es sobre $\mathbb{R}^3 \setminus B$?

5.17. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ la bola unidad abierta en el plano. Hallar el valor de las siguientes integrales impropias:

(a) $\int_A [1 - \sqrt{x^2 + y^2}]^p dx dy$, para $p < -1$.

(b) $\int_A \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$.

5.18. Deducir fórmulas para el volumen de cuerpos de revolución en \mathbb{R}^3 . Después calcular el volumen del toro generado al girar una circunferencia de radio r y centro $(a, 0, 0)$, situada en el plano $y = 0$ alrededor del eje z (se supone que $0 < r < a$).

Capítulo 6

Curvas y trayectorias

6.1 Representación de curvas

Una curva se puede visualizar como la trayectoria de un punto que se mueve en el espacio. A partir de esta idea mecánica, se asocia con el tiempo t el carácter de *parámetro* de la curva.

Definición 6.1. Una curva α en el espacio euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 es la imagen de una función continua $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. La función

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), t \in I,$$

se llama representación paramétrica (o simplemente, parametrización) de la curva α . Las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ se llaman funciones coordenadas de la parametrización. La variable t es el parámetro de la curva.

En la definición 6.1, el intervalo I puede ser finito, infinito, semi infinito, abierto, cerrado o semiabierto.

Cuando no haya lugar a confusión (lo que será las más de las veces) se le llamará simplemente *curva* a la parametrización.

6.1.1 Reparametrizaciones

Una curva α puede admitir más de una parametrización; es decir, α se puede parametrizar en más de una forma.

Definición 6.2. Sea $\vec{x} = \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $t \in I$, una parametrización de una curva α . Sea $h : J \rightarrow I$ un difeomorfismo entre los intervalos J e I . Entonces la curva $\vec{y}(r) = (\vec{x} \circ h)(r) = \vec{x}(h(r))$, $r \in J$ se llama reparametrización de la curva α . La función h se llama cambio de parámetro.

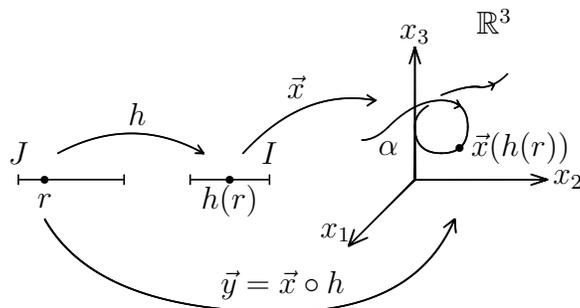


Figura 6.1: Una reparametrización

Debe ser obvio que las imágenes de las curvas $\vec{x} = \vec{x}(t), t \in I$ y $\vec{y} = \vec{y}(r), r \in J$ coinciden; solo varía la forma en la que la curva es recorrida con cada parametrización. Véase la figura 6.1.

6.1.2 Curvas regulares

Como lo que interesa es la aplicación de las herramientas del cálculo a la geometría, se deben imponer condiciones de suavidad a las parametrizaciones de curvas. En todo lo que sigue se supondrá que:

- (a) las funciones coordenadas son hasta tres veces continuamente diferenciables, y que
- (b) las derivadas de las funciones coordenadas no se anulan simultáneamente; es decir, no existe un valor t_0 del parámetro para el que $\dot{x}_i(t_0) = 0, i = 1, 2, 3$.

Definición 6.3. Una parametrización que satisfaga las condiciones (a) y (b) se llama parametrización regular. Una curva se llama regular si admite una parametrización regular.

La curva $\vec{x}(t) = (t^2, 0, 0), -\infty < t < \infty$ satisface la condición (a), pero no la (b); la curva $\vec{x}(t) = (x_1(t), 1, 0)$ donde $x_1(t) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ satisface la condición (b), pero no la (a).

A continuación se presentan tres ejemplos simples, pero importantes de curvas regulares.

Ejemplo 6.1. (rectas) Una parametrización de la recta que pasa por el punto \vec{a} en la dirección del vector \vec{v} es $\vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v}, -\infty < t < \infty$. El vector \vec{v} es el *vector de dirección* de la recta. Véase la figura 6.2. \diamond

Ejemplo 6.2. (círculos) Una parametrización del círculo con centro en el punto \vec{p} de radio r y contenido en el plano generado por los vectores ortogonales \vec{e}_1 y \vec{e}_2 es

$$\vec{x}(t) = \vec{p} + r(\cos t\vec{e}_1 + \sin t\vec{e}_2), t \in [0, 2\pi]. \quad \diamond$$

Ejemplo 6.3. (hélices) Consideremos la curva

$$\vec{x}(t) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, bt), -\infty < t < \infty.$$

A medida que el parámetro t varía, las coordenadas x y y de la trayectoria se desplazan sobre el círculo de radio a , centrado en el origen, mientras que la coordenada z se eleva (o desciende) a velocidad constante si $b > 0$ (o si $b < 0$). Esta curva es un ejemplo de una *hélice circular recta*. A ω se le conoce como la *velocidad angular* y a b como el *paso* de la hélice. \diamond

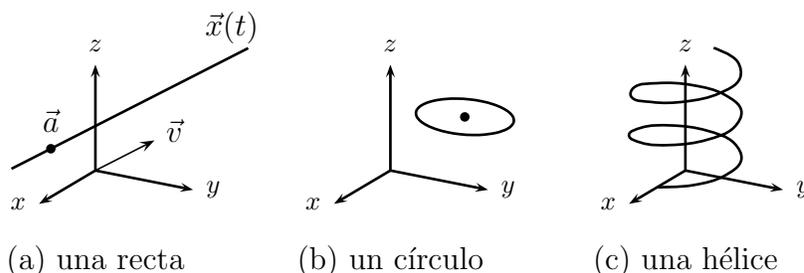


Figura 6.2: Ejemplos de curvas regulares \mathbb{R}^3

Se insiste en que, de acuerdo con la definición 6.3, el carácter de regular de una curva depende de la forma en la que se parametrize. Por ejemplo, $\vec{x}(t) = (t, 0, 0)$, $-\infty < t < \infty$ y $\vec{y}(r) = (r^3, 0, 0)$, $-\infty < r < \infty$ son parametrizaciones del eje x ; sin embargo, la primera es regular, pero la segunda no. Por esta razón una curva se define como *regular* si admite una *parametrización regular*. La importancia de trabajar con curvas regulares, resalta al considerar el carácter dinámico o geométrico de la noción de curva.

Definición 6.4. La velocidad de una curva regular α parametrizada por $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $t \in I$, es

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)).$$

La rapidez de α es $|\dot{\vec{x}}| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}$. La aceleración de α es

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2x_2}{dt^2}, \frac{d^2x_3}{dt^2} \right)$$

Cinemáticamente, el vector velocidad es lo que su nombre indica: es el vector que, en cada instante de tiempo t , apunta en la dirección en la que se mueve el punto $\vec{x}(t)$ y su norma indica con qué rapidez lo hace. El significado geométrico del vector de velocidad se deduce de la definición misma. Como

$$\dot{\vec{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)],$$

se tiene que, para cada valor del parámetro t_0 , el vector de velocidad en el punto $\vec{p} = \vec{x}(t_0)$ es un vector *tangente* a la curva en el punto $\vec{p} = \vec{x}(t_0)$.

Se puede decir entonces que una curva es *regular* si el punto $\vec{x}(t)$ no se detiene nunca (es decir, si la rapidez nunca es igual a cero) en $t \in I$ o, en términos geométricos, la curva es regular solo si en cada punto tiene un vector tangente, o sea, no tiene picos (o esquinas).

6.2 Función longitud de arco

Definición 6.5. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva, se define la longitud de α como

$$\ell(\alpha) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^N \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nótese que el supremo se toma respecto de todas las posibles particiones $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_N = b\}$ de $[a, b]$.

Cuando $\ell(\alpha) < \infty$ se dice que α es una curva *rectificable*, o simplemente que *tiene longitud finita*. De la definición 6.5 se desprende que $\ell(\alpha) \geq \|\alpha(b) - \alpha(a)\|$ (es decir, la línea recta es el camino más corto entre dos puntos).

Proposición 6.1. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva de longitud finita l , entonces la función $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, l]$, definida por $\lambda(t) = \ell(\alpha|_{[a,t]})$, donde $\alpha|_{[a,t]}$ es la restricción de α a $[a, t]$, es *monótona creciente y continua*.

Demostración. Es inmediato que la función λ es creciente. Para probar que λ es continua en todo punto $t_0 \in [a, b]$, basta demostrar que los límites laterales de λ en t_0 son ambos iguales a $\lambda(t_0)$. Veamos, por ejemplo, que $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \lambda(t) = \lambda(t_0)$ (la demostración es análoga cuando se considera el límite por la izquierda).

Debe ser evidente que $\lambda(t) = \lambda(t_0) + \ell(\alpha|_{[t_0,t]})$. Entonces, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $t_0 = a$. Debemos probar, por tanto, que $\lim_{t \rightarrow a^+} \lambda(t) = 0 = \lambda(a)$. Pero si esto fuera falso, como λ es creciente, tendríamos que

$$\lambda(t) \geq \varepsilon > 0 \quad \text{para todo } t > a,$$

con $\varepsilon = \lim_{t \rightarrow a^+} \lambda(t)$. Al ser α continuo en a , podemos encontrar $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|\alpha(t) - \alpha(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

siempre que $t - a \leq \delta_0$. Por otro lado, como $\lambda(b) = \ell(\alpha)$ es finita, existe una partición $t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$ de $[a, b]$, tal que

$$\sum_{j=1}^N \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \geq \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{4} \tag{6.1}$$

Evidentemente podemos suponer (añadiendo $a + \delta_0$ a esta partición de $[a, b]$ si fuera necesario) que $t_1 - t_0 \leq \delta_0$, y por tanto, $\|\alpha(t_1) - \alpha(t_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$, lo que combinado con (6.1) nos da

$$\sum_{j=2}^N \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \geq \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2},$$

pero

$$\ell\left(\alpha|_{[t_1, b]}\right) \geq \sum_{j=2}^N \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|,$$

luego

$$\ell\left(\alpha|_{[t_1, b]}\right) \geq \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2}$$

y así, usando la propiedad (3), obtenemos

$$\lambda(b) = \lambda(t_1) + \ell\left(\alpha|_{[t_1, b]}\right) \geq \varepsilon + \lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2} = \lambda(b) + \frac{\varepsilon}{2},$$

luego $\varepsilon \leq 0$, lo que es absurdo. \square

Definición 6.6. Diremos que una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase \mathcal{C}^1 por pedazos si su derivada existe y es continua, salvo quizás en una cantidad finita de puntos de $[a, b]$. En lo que sigue, consideraremos casi exclusivamente curvas de clase \mathcal{C}^1 por pedazos.

Observación 6.1. Si la curva $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donde $\alpha_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, es diferenciable en t_0 , su derivada en t_0 es $\dot{\alpha}(t_0) = (\dot{\alpha}_1(t_0), \dots, \dot{\alpha}_n(t_0))$. De la definición de derivada se desprende que $\dot{\alpha}(t_0)$ representa, geoméricamente hablando, el vector tangente a la curva α en el punto $\alpha(t_0)$. La norma $\|\dot{\alpha}(t_0)\|$ de la derivada mide la rapidez de α en t_0 .

Proposición 6.2. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase \mathcal{C}^1 por pedazos. Entonces

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt. \quad (6.2)$$

Obsérvese que no todas las curvas continuas y \mathcal{C}^1 por pedazos tienen longitud finita (ver ejercicio 6.1); por tanto, la integral $\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt$ puede ser infinita. Lo que nos dice (6.2) es que $\ell(\alpha)$ es finita si y solo si $\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt$ lo es, y en este caso estas dos cantidades valen lo mismo.

Demostración.

Caso 1. Consideraremos primero el caso en que α es de clase \mathcal{C}^1 en todo el intervalo $[a, b]$. Como este intervalo es compacto, la derivada α es uniformemente continua y acotada en $[a, b]$. En particular, $t \mapsto \|\alpha_0(t)\|$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt$ es finita. También sabemos que $\ell(\alpha)$ es finita,

puesto que α es Lipschitz. Por tanto, en este caso solo debemos probar que $\ell(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt$.

Como la derivada de α es continua en el compacto $[a, b]$, sus funciones componentes $\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_n$ son uniformemente continuas en $[a, b]$, lo que implica que la función

$$(r_1, \dots, r_n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^n |\dot{\alpha}_j(r_j)|^2 \right)^{1/2},$$

definida para $(r_1, \dots, r_n) \in [a, b]^n = [a, b] \times \dots \times [a, b]$, es uniformemente continua en $[a, b]^n$, y por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta_1 > 0$, tal que si $r_j, r \in [a, b]$, $j = 1, \dots, n$, y $|r_j - r| \leq \delta_1$, entonces

$$\left| \left(\sum_{j=1}^n |\dot{\alpha}_j(r_j)|^2 \right)^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^n |\dot{\alpha}_j(r)|^2 \right)^{1/2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (6.3)$$

Ahora, como $\|\dot{\alpha}\|$ es integrable sobre $[a, b]$, por el teorema 1.2 de Darboux (p. 17), existe $\delta_2 > 0$ tal que si $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b\}$ es una partición de $[a, b]$ en intervalos de longitud menor o igual que δ_2 , entonces

$$\left| \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt - \sum_{i=1}^N \|\dot{\alpha}(t_{i-1})\| (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.4)$$

Por otro lado, por definición de $\ell(\alpha)$, y teniendo en cuenta que esta longitud es finita, existe $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b\}$ partición de $[a, b]$, tal que

$$\left| \ell(\alpha) - \sum_{i=1}^N \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.5)$$

Podemos suponer (añadiendo puntos si fuera necesario) que esta partición P tiene la propiedad de que $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta$, donde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Por el teorema del valor medio aplicado a cada función componente $\alpha_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la curva α en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, sabemos que existe $r_i^j \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\alpha_j(t_i) - \alpha_j(t_{i-1}) = \dot{\alpha}_j(r_i^j)(t_i - t_{i-1}). \quad (6.6)$$

Usando (6.3) y (6.6) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^N \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^N \|\dot{\alpha}(t_i)(t_i - t_{i-1})\| \right| = \\ & \left| \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n |\dot{\alpha}_j(r_i^j)|^2 \right)^{1/2} (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n |\dot{\alpha}_j(t_{i-1})|^2 \right)^{1/2} (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \\ & \sum_{i=1}^N \left| \left(\sum_{j=1}^n |\dot{\alpha}_j(r_i^j)|^2 \right)^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^n |\dot{\alpha}_j(t_{j-1})|^2 \right)^{1/2} \right| (t_i - t_{i-1}) \leq \\ & \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

lo que combinado con (6.4) y (6.5) nos da

$$\left| \ell(\alpha) - \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt \right| \leq 3\frac{\varepsilon}{3}.$$

Como esto se satisface para todo $\varepsilon > 0$, se concluye que $\ell(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt$.

Caso 2. Ahora consideraremos el caso en que α es continua en $[a, b]$ y la derivada $\dot{\alpha}(t)$ existe y es continua en el intervalo abierto (a, b) . En primer lugar, veamos que $\ell(\alpha)$ es finita si y solo si la integral impropia $\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt$ converge. En efecto, supongamos que esta integral es finita. Como α es continua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $a < t < r < b$, con $|t - a| \leq \delta$ y $|b - r| \leq \delta$, entonces

$$\|\alpha(t) - \alpha(a)\| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \|\alpha(r) - \alpha(b)\| \leq \varepsilon,$$

y por tanto, para toda partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ de $[a, b]$ en intervalos de longitud menor o igual que δ , se tendrá (aplicando el caso 1 a α en $[t_1, t_{N-1}]$) que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \leq \\ & \|\alpha(t_1) - \alpha(a)\| + \ell(\alpha|_{[t_1, t_{N-1}]}) + \|\alpha(b) - \alpha(t_{N-1})\| = \\ & \|\alpha(t_1) - \alpha(a)\| + \int_{t_1}^{t_{N-1}} \|\dot{\alpha}(r)\| ds + \|\alpha(b) - \alpha(t_{N-1})\| \leq \\ & 2\varepsilon + \int_{t_1}^{t_{N-1}} \|\dot{\alpha}(u)\| du \leq 2\varepsilon + \int_a^b \|\dot{\alpha}(u)\| du \end{aligned}$$

y esto implica que $\ell(\alpha)$ es finita. Por otro lado, si $\ell(\alpha)$ es finita, sabemos por la proposición 6.1 (p. 88) que, fijando $r \in (a, b)$, la función $\lambda : [r, b] \rightarrow [0, \ell]$ definida por $\lambda(t) = \ell(\alpha|_{[r, t]})$, donde $\alpha|_{[r, t]}$ es la restricción de α a $[r, t]$, es monótona creciente y continua. En particular,

$$\lim_{t \rightarrow b} \ell(\alpha|_{[r, t]}) = \ell(\alpha|_{[r, b]}),$$

y como, por lo anterior, es $\ell(\alpha|_{[r, t]}) = \int_r^t \|\dot{\alpha}(u)\| du$, se deduce que

$$\int_r^b \|\dot{\alpha}(u)\| du = \lim_{t \rightarrow b} \int_r^t \|\dot{\alpha}(u)\| du = \lim_{t \rightarrow b} \ell(\alpha|_{[r, t]}) = \ell(\alpha|_{[r, b]}).$$

Un razonamiento análogo prueba que

$$\int_a^r \|\dot{\alpha}(u)\| du = \lim_{t \rightarrow a} \int_t^r \|\dot{\alpha}(u)\| du = \ell(\alpha|_{[a, r]}).$$

Entonces

$$\ell(\alpha) = \ell(\alpha|_{[a,r]}) + \ell(\alpha|_{[r,b]}) = \int_a^r \|\dot{\alpha}(u)\| du + \int_r^b \|\dot{\alpha}(u)\| du = \int_a^b \|\dot{\alpha}(u)\| du.$$

Esto prueba (6.2) en el caso en que α es continua en $[a, b]$ y la derivada $\dot{\alpha}(t)$ existe y es continua en el intervalo abierto (a, b) .

Caso 3. Por último, consideramos el caso más general en que α es continua y de clase \mathcal{C}^1 por pedazos. Entonces, la curva α puede expresarse como la unión de una cantidad finita de curvas α_j cada una de las cuales está en el caso anterior; es decir, $\alpha = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k$, con $\alpha_j = \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$, para ciertos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, y cada α_j es de clase \mathcal{C}^1 en el intervalo abierto (t_{j-1}, t_j) . Entonces, se tiene que

$$\ell(\alpha) = \sum_{j=1}^k \ell(\alpha_j) = \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\dot{\alpha}(u)\| du = \int_a^b \|\dot{\alpha}(u)\| du,$$

y así (6.2) queda probada en toda su generalidad. \square

Definición 6.7. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva \mathcal{C}^1 por pedazos, y sea $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una biyección de clase \mathcal{C}^1 . Entonces, la composición

$$\beta = \alpha \circ h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta(r) = \alpha(h(r)),$$

se dice que es una reparametrización de α . Si la función h es creciente, se dice que la reparametrización β preserva la orientación de α , o que α y β tienen la misma orientación. Si la función h es decreciente, se dice que la reparametrización β invierte la orientación de α , o que α y β tienen orientaciones opuestas.

Observación 6.2. En el caso especial en el que $h : [a, b] \rightarrow [a, b]$ está dada por $h(t) = a + b - t$, entonces la reparametrización β recorre la traza de α con la misma rapidez pero en el sentido opuesto al que lo hace α . Por ejemplo, si $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, es la parametrización del círculo unitario con centro en el origen del plano, y β es la reparametrización $\beta(r) = (\cos(2\pi - r), \sin(2\pi - r)) = (\cos r, -\sin r)$, $r \in [0, 2\pi]$, entonces α y β recorren el círculo con igual rapidez, en sentidos opuestos. Ver figura 6.3.

Proposición 6.3. Si β es una reparametrización de una curva α de longitud finita l , entonces la longitud de β es l .

Demostración. Usando la notación de la definición 6.7 tenemos que

$$\ell(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\| dt = \int_c^d \|\dot{\alpha}(h(t))\| |h'(t)| dt = \int_a^b \|\dot{\alpha}(r)\| dr = \ell(\alpha).$$

En el último paso hemos supuesto que la biyección h es creciente. En caso contrario, en la última integral debe remplazarse dr por $-dr$, pero también se deben intercambiar los límites de integración. \square

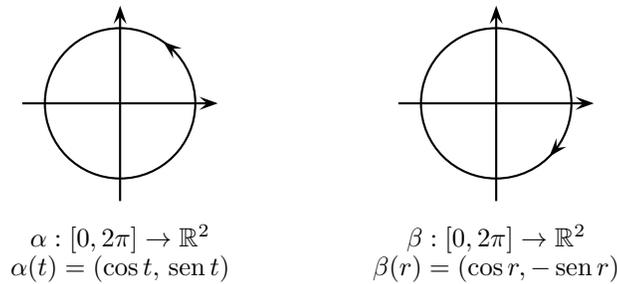


Figura 6.3: Una reparametrización α y una reparametrización β del círculo

Debiera ser claro que si β es reparametrización de α entonces ambas curvas tienen la misma traza (y la misma longitud). Así, h no es más que un cambio de variable que modifica la rapidez con que se recorre la curva. En efecto, nótese que $\beta'(t) = \dot{\alpha}(h(t))h'(t)$, de modo que el vector velocidad de β se multiplica por el factor escalar $h'(t)$. Además, como h es una biyección \mathcal{C}^1 , h es o bien estrictamente creciente, o bien estrictamente decreciente, y la derivada $h'(t)$ no cambia de signo. En el primer caso se tendrá $h(c) = a$ y $h(d) = b$, luego β recorre la traza de α en el mismo sentido que lo hace α (se dice entonces que la reparametrización β *conserva la orientación*); y en el segundo caso es $h(c) = b$ y $h(d) = a$, luego β recorre la traza de α en sentido opuesto al que lo hace α : comienza en $\alpha(b)$ y termina en $\alpha(a)$ (en este caso se dice que β *invierte la orientación*).

Cuando una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es regular (es decir, es de clase \mathcal{C}^1 y tiene la propiedad de que $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$), siempre existe una reparametrización $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de α que conserva la orientación y que tiene la notable propiedad de que

$$\int_0^t \|\beta'(u)\| \, du = t$$

para todo $t \in [0, l]$, es decir, el parámetro t coincide con la longitud de la curva recorrida por β desde el instante $u = 0$ hasta el tiempo $u = t$. Se dice entonces que β *está parametrizado por la longitud de arco*.

La parametrización β se obtiene de la siguiente manera. Sea $s : [a, b] \rightarrow [0, l]$ la función *longitud de arco* $s(t) = \ell(\alpha|_{[a,t]})$ de α . La función s es invertible. Sea $t = t(s)$ la función inversa de $s = s(t)$ y construyamos la parametrización $\beta(s) = \alpha(t(s))$. Denotando con un apóstrofo la derivación con respecto a s y usando el hecho de que $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\alpha}\|$, encontramos que $\beta'(s) = \dot{\alpha}(t(s)) \frac{dt}{ds} = \dot{\alpha}(t(s)) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|\dot{\alpha}\|} \dot{\alpha}$. Esta situación equivale a decir que β recorre la traza de α con rapidez constante igual a 1:

$$\|\beta'(s)\| = 1$$

para todo $s \in [0, l]$.

La reparametrización por la longitud de arco simplifica muchas veces las demostraciones relativas a propiedades de curvas en el espacio.

Ejemplo 6.4. Encuentre la reparametrización de rapidez unitaria de una hélice circular $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \geq 0$.

Solución. La derivada de α es $\dot{\alpha}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, y la rapidez es $\|\dot{\alpha}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. La función longitud de arco (desde $t = 0$) es $s(t) = \ell(\alpha|_{[0,t]}) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = \sqrt{a^2 + b^2} t$. La función inversa de la función longitud de arco es $t = t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Entonces la reparametrización de rapidez unitaria de la hélice es $\beta(s) = \alpha(t(s)) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$. \diamond

6.3 Integración de campos escalares sobre curvas

Un *campo escalar* en un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es simplemente una función escalar de varias variables $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Estudiaremos la definición de integral de un campo escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definición 6.8. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva \mathcal{C}^1 por pedazos sobre su dominio. Se define la integral de línea de f sobre α por

$$\int_{\alpha} f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\dot{\alpha}(t)\| dt, \quad (6.7)$$

cuando esta integral existe.

Nótese que si $f = 1$, la integral $\int_{\alpha} f ds$ es precisamente la longitud de α .

Observación 6.3. Con relación a (6.7), el factor $ds = \|\dot{\alpha}(t)\| dt = ds(t)$ a veces se llama elemento escalar de longitud de arco. Si $|h| \ll 1$, la cantidad $ds(t_0) = \|\dot{\alpha}(t_0)\| dt \approx \|\dot{\alpha}(t_0)\| h$ es una aproximación a la longitud de arco sobre α desde $\alpha(t_0)$ hasta $\alpha(t_0 + h)$.

Una interpretación física de este tipo de integral es la siguiente. Supóngase que la traza de α representa un alambre de densidad variable, y que el campo $f(x, y, z)$ denota la densidad de masa del alambre en el punto (x, y, z) ; entonces la integral $\int_{\alpha} f$ será la masa total del alambre.

Ejemplo 6.5. Sean $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, y $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcular la integral $\int_{\alpha} f ds$.

Solución.

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha} f \, ds &= \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \sqrt{(-\sin^2 t + \cos^2 t + 1)} \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} \, dt = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi (3 + 4\pi^2). \quad \diamond
 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.6. Hallar la masa de un alambre que sigue la circunferencia plana de radio cincuenta centímetros y centro en el origen, y cuya densidad de masa en cada punto (x, y) de la circunferencia viene dada por la función $f(x, y) = x^2 + 2|y|$ gramos por centímetro de alambre.

Solución. Una parametrización de la curva α es $\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Se obtiene que $\|\dot{\alpha}(t)\| = \frac{1}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha} f \, ds &= \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \cos^2 t + |\sin t|\right) \, dt \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin t| \, dt \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt + \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{1}{8} \pi + 2. \quad \diamond
 \end{aligned}$$

Cuando $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva plana y $z = f(x, y) \geq 0$, puede interpretarse que $f(x, y)$ es la altura de un muro levantado sobre la curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$; entonces la integral $\int_{\alpha} f(x, y) \, ds$ representa el área de dicho muro. La justificación intuitiva de esta afirmación se basa en la interpretación del elemento escalar de longitud de arco. En cada punto de la curva, el producto $f(\alpha(t)) \, ds(t)$ es aproximadamente igual al área de un rectángulo de altura $f(\alpha(t))$ y base $ds(t)$. La suma (de Riemann) de estas áreas converge al valor del área del muro levantado sobre la curva y cuya altura, en cada punto $\alpha(t)$ es $f(\alpha(t))$.

Ejemplo 6.7. Calcular el área de un muro circular de radio de diez metros y cuya altura en cada punto es un metro más que la décima parte de la distancia al cuadrado de dicho punto a un punto fijo P situado sobre la circunferencia.

Solución. La curva es $\alpha(t) = (10 \cos t, 10 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. La rapidez de α es 10. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el punto fijo sobre la circunferencia es $P(10, 0)$. Entonces, la altura

del muro es

$$\begin{aligned}
 f(\alpha(t)) &= \frac{1}{10} \|\alpha(t) - P\|^2 + 1 \\
 &= \frac{1}{10} \|(\cos t - 1, \operatorname{sen} t)\|^2 + 1 \\
 &= \frac{1}{10} ((\cos t - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 t) + 1 \\
 &= \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \cos t.
 \end{aligned}$$

Entonces, el área del muro es

$$\int_{\alpha} f \, ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{5} \cos t \right) 10 \, dt = 24\pi. \quad \diamond$$

Ejercicios

6.1. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva definida por $\alpha(t) = (t, t \operatorname{sen}(1/t))$ si $t > 0$, y $\alpha(0) = (0, 0)$. Probar que α es continuo y de clase C^1 por pedazos en $[0, 1]$ y de hecho es diferenciable de clase C^∞ en $(0, 1]$, pero su longitud es infinita.

6.2. Hacer un dibujo de la traza de las siguientes curvas, y calcular su longitud:

- (a) $\alpha(t) = (R \cos 2t, R \operatorname{sen} 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$
- (b) $\alpha(t) = (R \cos t, -R \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- (c) $\alpha(t) = (R \cos t^2, R \operatorname{sen} t^2)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- (d) $\alpha(t) = (t^4, t^4)$, $-1 \leq t \leq 1$
- (e) $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$
- (f) $\alpha(t) = (R \cos 2t, R \operatorname{sen} 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$
- (g) $\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t < \infty$ (espiral logarítmica)
- (h) $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, $-2 \leq t \leq 2$
- (i) $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $-4 \leq t \leq 4$

6.3. Sean α y β dos curvas que tienen la misma traza. Supongamos que ambas son inyectivas, excepto en una cantidad finita de puntos. Probar que α y β tienen la misma longitud.

Sugerencia: suponer primero que tanto α como β son inyectivas en todo su dominio, y deducir el resultado de la propiedad (2) de la proposición 6.2. Para probar el caso más general, expresar α y β como unión de curvas inyectivas y aplicar lo anterior.

6.4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 por pedazos. Probar que la longitud de la gráfica de f sobre $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

6.5. Definamos $\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(-e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2} \right) & \text{si } t < 0, \\ (0, 0) & \text{si } t = 0, \\ \left(e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2} \right) & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

y sea $\beta : [-e^{-1}, e^{-1}] \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta = (t, |t|)$. Probar que α y β tienen la misma traza (a saber, un trozo de la gráfica de la función valor absoluto); sin embargo, α es de clase C^∞ en todo su dominio, mientras que β no es diferenciable en el origen. No obstante, obsérvese que $\dot{\alpha}(0) = 0$; es decir, α debe detenerse en $t = 0$ para poder ser diferenciable en ese punto. Generalizar este hecho: probar que si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una curva diferenciable y su traza coincide con la gráfica de una función f , cuyas derivadas laterales (no necesariamente finitas) son diferentes en un punto x_0 (y en particular, la función no es derivable en ese punto), entonces $\dot{\alpha}(t) = 0$ para todos los t tales que $x(t) = x_0$. Por otra parte, si solo se supone que f no es derivable en x_0 , probar que al menos se tiene $x'(t) = 0$ para todo t con $x(t) = x_0$.

6.6. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva C^1 tal que $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ para todo t . Probar que $\|\alpha(t)\|$ es una constante no nula si y solo si el vector velocidad $\dot{\alpha}(t)$ es ortogonal al vector posición $\alpha(t)$ para todo t .

6.7. Una curva α de clase C^2 tiene la propiedad de que su segunda derivada $\dot{\alpha}'(t)$ es idénticamente cero. ¿Qué puede decirse sobre α ?

6.8. Sea α una curva en el plano cuya expresión en coordenadas polares viene dada por $\rho = \rho(\theta)$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Demostrar que su longitud es $\ell(\alpha) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$

6.9. Calcular la longitud de la cardioide $\rho = a(1 + \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

6.10. En los siguientes casos, calcular la integral de f a lo largo de α :

(a) $f(x, y) = 1 + y$; $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

(b) $f(x, y, z) = xyz$; $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 3)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $f(x, y, z) = x + y + z$; $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6.11. En los siguientes casos, calcular la integral del campo \vec{F} a lo largo de la curva α :

(a) $\vec{F}(x, y) = (-x^2y, xy^2)$; $\alpha(t) = (\sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$; $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2)$; $\alpha = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0 \right\}$, recorrida en sentido positivo.

6.12. Calcular:

(a) $\int_{\alpha} y dx - x dy$; $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $\int_{\alpha} x^2 dx + xy dy$; α es el cuadrado de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, en sentido positivo.

(c) $\int_{\alpha} \sin z dx + \cos z dy - (xy)^{1/3} dz$; $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$, $0 \leq t \leq 7\pi/2$.

- (d) $\int_{\alpha} y dx + (3y^2 - x) dy + z dz$; $\alpha(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \leq t \leq 1$; $n \in \mathbb{N}$.
- (e) $\int_{\alpha} 2xy dx + (x^2 + z) dy + y dz$; α es el segmento de $(1, 0, 2)$ a $(3, 4, 1)$.
- (f) $\int_{\alpha} xy dx + yz dy + xz dz$; $\alpha = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, z = x, y \geq 0\}$.

6.13. Calcular la integral a lo largo de la curva γ indicada.

- (a) $\int_{\gamma} xy^2 ds$; γ es el segmento de recta de $(1, 2, 0)$ a $(2, 1, 3)$.
- (b) $\int_{\gamma} \operatorname{sen} x ds$; γ es el segmento de recta de $(-1, 2, 1)$ a $(1, 2, 5)$.
- (c) $\int_{\gamma} z \cos(xy) ds$; γ es el segmento de recta de $(1, 0, 1)$ a $(2, 2, 3)$.
- (d) $\int_{\gamma} \operatorname{sen} x dx + \cos y dy$; γ es el arco de semicírculo superior de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.
- (e) $\int_{\gamma} xe^y dx + x^2y dy$; γ es el segmento de recta $0 \leq x \leq 2$, $y = 3$.
- (f) $\int_{\gamma} xe^y dx + x^2y dy$; γ es el segmento de recta $x = 4$, $0 \leq y \leq 4$.
- (g) $\int_{\gamma} xe^y dx + x^2y dy$; γ es la curva $x = 3t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$.
- (h) $\int_{\gamma} xe^y dx + x^2y dy$; γ es la curva $\gamma(t) = (e^t, e^t), -1 \leq t \leq 1$.
- (i) $\int_{\gamma} x dy + y dx$; γ es una curva de $(-1, 2)$ a $(2, 3)$.
- (j) $\int_{\gamma} yz dx + zx dy + xy dz$; γ es una curva de $(1, 1, 1)$ a $(1, 2, 3)$.

6.14. Calcular las siguientes integrales de línea.

- (a) $\int_{\gamma} (\cos x, \operatorname{sen} y) \cdot \vec{ds}$, a lo largo de la curva $\gamma(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.
- (b) $\int_{\gamma} \left(\frac{1}{xy}, \frac{1}{x+y} \right) \cdot \vec{ds}$, a lo largo de la trayectoria que une los puntos $(1, 1)$, $(3, 1)$ y $(3, 6)$ con segmentos rectos.
- (c) $\int_{\gamma} \left(\frac{1}{xy}, \frac{1}{x+y} \right) \cdot \vec{ds}$, a lo largo de la curva $\gamma(t) = (2t, 5t)$, $1 \leq t \leq 4$.

(d) $\int_{\gamma} \left(\frac{1}{xy}, \frac{1}{x+y} \right) \cdot \vec{ds}$, a lo largo de la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, $1 \leq t \leq 4$.

(e) $\int_{\gamma} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$, a lo largo de la curva $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

(f) $\int_{\gamma} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$, a lo largo de la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \tan t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Capítulo 7

Campos vectoriales

7.1 Campos vectoriales, líneas de flujo

Un *campo vectorial* en $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es una función de la forma $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ se tiene que $\vec{F}(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$, entonces las funciones $F_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ se llaman *funciones coordenadas* (o *componentes*) del campo \vec{F} .

Así, un campo vectorial en \mathbb{R}^2 es de la forma $\vec{F}(x) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$, mientras que en \mathbb{R}^3 , $\vec{F}(x) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3))$.

En términos geométricos, si \vec{F} es un campo vectorial, $F(x)$ se visualiza como el vector que apunta del punto x al punto $x + F(x)$. En la figura 7.1 se representa el campo vectorial en el plano $F(x, y) = \left(-x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2} \right)$.

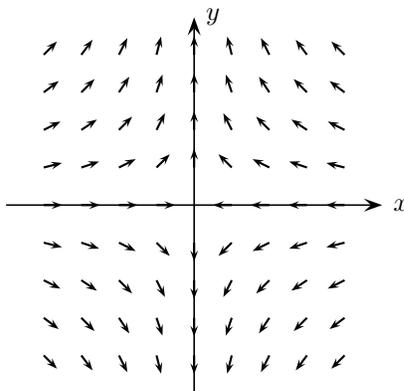


Figura 7.1: El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$

Un concepto importante asociado con campos vectoriales es el de líneas de flujo.

Definición 7.1. Sea $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Una línea de flujo para \vec{F} es una curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A$, tal que $\dot{\alpha}(t) = \vec{F}(\alpha(t))$, donde I es un intervalo.

Ejemplo 7.1. (a) Encuentre la ecuación de las líneas de flujo del campo representado en la figura 7.1; (b) encuentre la ecuación de la línea de flujo que pasa por el punto $(-4, 2)$ y gráfíquela.

Solución. (a) En este caso las líneas de flujo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ satisfacen la ecuación

$$\dot{\alpha}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t)) = \left(\frac{-x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}, \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \right),$$

es decir,

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{-x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}, \quad \frac{dy}{dt}(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones se tiene

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y},$$

y separando variables,

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Integrando:

$$\ln x + \ln y = c_1 = \ln c \quad (c_1 : \text{constante de integración, } c = e^{c_1});$$

de aquí que

$$xy = c.$$

Así, las líneas de flujo son hipérbolas.

(b) La línea de flujo que pasa por $(-4, 2)$ es $y = -8/x$, que, parametrizada, es $\alpha(t) = (t, -8/t)$. La gráfica se muestra en la figura 7.2. \diamond

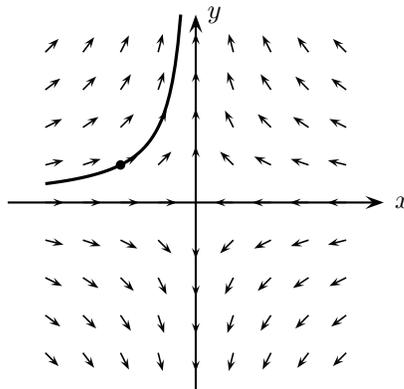


Figura 7.2: Línea de flujo que pasa por el punto $(-4, 2)$

7.2 Gradiente, divergencia, rotacional

7.2.1 Gradiente

Definición 7.2. Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable, el gradiente de f , denotado $\nabla f(x)$, es el campo vectorial

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

Nótese que el gradiente de un campo escalar diferenciable f es simplemente la derivada de la función f . El símbolo ∇ se llama *nabla*; la expresión $\nabla f(x)$ se lee *nabla de f en x*. Nótese también que ∇ es un operador, a saber

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad (7.1)$$

que asocia un campo vectorial a cada campo escalar diferenciable f .

Observación 7.1. Es conveniente recordar la interpretación siguiente del campo vectorial gradiente.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideremos la función $\phi(t) = f(x + t\vec{v})$, definida al restringir la función f a la recta que pasa por el punto x en la dirección del vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. ϕ es diferenciable al ser composición de dos funciones diferenciables. Por la regla de la cadena, la derivada de ϕ en $t = 0$ es

$$\dot{\phi}(0) = \left. \frac{d}{dt} f(x + t\vec{v}) \right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)v_n = \nabla f(x) \cdot \vec{v}. \quad (7.2)$$

Este número se llama derivada direccional de f en el punto x en dirección del vector \vec{v} . Nótese que la derivada direccional de f alcanza su valor máximo cuando el ángulo entre el vector \vec{v} y el vector $\nabla f(x)$ es cero. Así, el vector gradiente en el punto x es el vector en el que la derivada direccional de f alcanza su máximo valor.

La derivación direccional es una generalización de la derivación parcial en el sentido de que si \vec{v} es el j -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n (es decir, si \vec{v} es la j -ésima columna de la matriz identidad de tamaño $n \times n$), entonces la derivada direccional es la j -ésima derivada parcial de f en x .

Se dice que un campo vectorial continuo $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial *gradiente* si existe un campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 , tal que $\vec{F} = \nabla f$. En este caso se dice que f es una función (o campo) *potencial* para \vec{F} .

7.2.2 Divergencia

Definición 7.3. Sea $F = (F_1, \dots, F_n) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable en A . La divergencia del campo \vec{F} en un punto $x \in A$, denotada $\operatorname{div} F(x)$, se define, formalmente, como

$$\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}. \quad (7.3)$$

Observación 7.2. *Nótese que la divergencia puede verse como una operación que asocia un campo escalar a cada campo vectorial diferenciable. La definición 7.3 es formal en el sentido de que presenta el concepto de divergencia mediante una fórmula, (7.3), que posiblemente no dice mucho ni desde el punto de vista matemático ni desde el punto de vista físico. Posteriormente, en la sección 9.5 (p. 133), después de estudiar el concepto de integración de un campo vectorial sobre una superficie (es decir, el concepto de flujo), daremos la definición de divergencia, de la que se deducen tanto la fórmula (7.3) como la interpretación física (o geométrica) de este concepto.*

Observación 7.3. *En términos del operador ∇ , formalmente se puede escribir*

$$\operatorname{div} F(x) = \nabla \cdot F(x).$$

Esta expresión es formal en el sentido de que se está usando la fórmula para definir el producto interior de dos vectores (o campos vectoriales), aún cuando uno de ellos, el operador ∇ , no es ni vector ni campo vectorial.

7.2.3 Rotacional

Definición 7.4. *Consideremos un campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ diferenciable en un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^3$. El rotacional de F en un punto $x = (x_1, x_2, x_3)$, denotado por $\operatorname{rot} \vec{F}(x)$, se define formalmente mediante*

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x) = \nabla \times \vec{F}(x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right). \quad (7.4)$$

Observación 7.4. *En el caso $n = 3$ la condición (4) del teorema 8.2 significa así que $\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = (0, 0, 0)$ para todo $(x, y, z) \in A$ (ver el ejercicio 7.8). Se dice en este caso que el campo \vec{F} es irrotacional.*

Observación 7.5. *La definición de rotacional que hemos presentado puede verse como una operación que asocia un campo vectorial a cada campo vectorial diferenciable en \mathbb{R}^3 . Sin embargo, un campo vectorial $F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ en el plano puede verse de manera natural como un campo vectorial en el espacio, por ejemplo $\tilde{F}(x_1, x_2, x_3) = (F_1, F_2, 0)$. Si F es diferenciable en un punto (x_1^0, x_2^0) entonces \tilde{F} es diferenciable en cualquier punto (x_1^0, x_2^0, x_3) , y al aplicar la definición (7.4) a \tilde{F} obtenemos*

$$\operatorname{rot} \tilde{F}(x_1^0, x_2^0, x_3) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \right). \quad (7.5)$$

La tercera coordenada que aparece en el lado derecho de (7.5) se llama rotacional escalar del campo F .

Observación 7.6. *En la sección 9.5 (p. 133) daremos la definición de rotacional.*

Las definiciones que hemos presentado de gradiente, $\text{grad} = \nabla$, divergencia, $\text{div} = \nabla \cdot$, y rotacional, $\text{rot} = \nabla \times$, satisfacen muchas propiedades útiles. En particular satisfacen

$$\text{div}(\text{rot}F) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0; \quad (7.6)$$

$$\text{rot}(\text{grad}f) = \nabla \times (\nabla f) = 0. \quad (7.7)$$

Ver identidades 17 y 18 en la subsección siguiente.

Aunque la definición 7.4 aplica solo a campos vectoriales en el espacio tridimensional, es posible generalizar el concepto de rotacional a espacios de dimensión mayor que tres. En [11], por ejemplo, se estudia, con base en octoniones, el rotacional en el espacio de dimensión siete, y algunas de sus aplicaciones. Sin embargo, para propósitos de estas notas, es suficiente limitarnos al caso tridimensional.

Un operador que actúa sobre funciones $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y que desempeña un papel muy importante en muchas leyes físicas es el *laplaciano*, que se denota con ∇^2 , y que se define como la divergencia del gradiente de f :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (7.8)$$

7.2.4 Identidades del cálculo vectorial

A continuación apuntamos algunas de las fórmulas que son útiles en el cálculo con campos vectoriales, y que involucran a los cuatro operadores básicos, que son el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano.

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$, para cualquier constante c
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, en puntos x donde $g(x) \neq 0$
5. $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) - (\nabla \times \vec{F}) \times \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$
6. $\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G}$
7. $\nabla \cdot (c\vec{F}) = c\nabla \cdot \vec{F}$, para cualquier constante c
8. $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$
9. $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$
10. $\nabla \times (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \times \vec{F} + \nabla \times \vec{G}$
11. $\nabla \times (c\vec{F}) = c\nabla \times \vec{F}$, para cualquier constante c

12. $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$
13. $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}(\nabla \cdot \vec{G}) - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$
14. $\nabla^2(f + g) = \nabla^2 f + \nabla^2 g$
15. $\nabla^2(cf) = c\nabla^2 f$, para cualquier constante c
16. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2 f$
17. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$
18. $\nabla \times (\nabla f) = 0$
19. $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$
20. $\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$
21. $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

Ejercicios

7.1. Sea $a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial suave. Demostrar que $\text{div}(a(x)\vec{F}(x)) = \nabla a(x) \cdot \vec{F}(x) + a(x)\text{div}\vec{F}(x)$

7.2. Dar un ejemplo de un campo de fuerzas no trivial \vec{F} , y una curva no trivial γ tales que el trabajo total realizado a lo largo de la curva sea cero.

7.3. Probar que dos funciones de potencial para un mismo campo vectorial (definido en un abierto conexo) difieren a lo sumo en una constante.

7.4. En cada caso, encontrar una función f , tal que $\nabla f = \vec{F}$, o explicar por qué no existe tal f .

1. $\vec{F} = (2x + y^2, 2y + x^2)$
2. $\vec{F} = (x^3, -y^4)$
3. $\vec{F} = (xe^y, ye^x)$
4. $\vec{F} = (y \cos x, y \sin x)$
5. $\vec{F} = (y \cos x, \sin x)$
6. $\vec{F} = (x^2 y^3, xy^4)$
7. $\vec{F} = (yz, xz, xy)$

7.5. Evaluar $\int_{\gamma} (10x^4 - 2xy^3) dx - 3x^2y^2 dy$, donde γ es la parte de la curva $x^5 - 5x^2y^2 - 7x^2 = 0$, desde $(0, 0)$ hasta $(3, 2)$.

7.6. Para cada campo \vec{F} , calcular el trabajo realizado por una partícula que se mueve desde el punto P hasta el punto Q .

1. $\vec{F} = (yz, xz, xy)$, $P(1, 0, 2)$, $Q(1, 2, 3)$.

2. $\vec{F} = (e^y, xe^y + \sin z, y \cos z)$, $P(0, 0, 0)$, $Q(1, -1, 3)$.

3. $\vec{F} = \left(\frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$, $P(1, 1, 1)$, $Q(4, 5, 6)$.

7.7. Comprobar que el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $\vec{F}(x, y, z) = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$, es campo gradiente, y calcular una función potencial para \vec{F} .

7.8. Sea \vec{F} un campo vectorial definido en un abierto de \mathbb{R}^3 . Comprobar que se satisface la condición de simetría del teorema 8.2 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, 2, 3$, si y solo si $\text{rot } \vec{F} = 0$.

7.9. Verificar las fórmulas (7.7) y (7.6).

7.10. Sea $\sigma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva definida por $\sigma(t) = (e^{t-1}, \sin \pi t)$. Calcular la integral de línea $\int_{\sigma} 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy$.

7.11. Demostrar que el campo gravitatorio de la tierra es irrotacional, y calcular una función de potencial.

7.12. Sea $F(x, y, z) = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$. Encontrar una función f , tal que $\nabla f = \vec{F}$.

7.13. Calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot ds$, donde $\gamma(t) = (\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, y \vec{F} es el campo del ejercicio 7.12.

7.14. Demostrar las identidades que aparecen en la subsección 7.2.4.

Capítulo 8

Integral de línea de campos vectoriales

Ahora presentamos la definición de integral de un campo vectorial sobre una curva.

8.1 Integrales de línea, trabajo

Definición 8.1. Sea $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, un campo vectorial continuo sobre la imagen de una curva C^1 por pedazos $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, con longitud finita. Se define la integral de línea de \vec{F} sobre α por la fórmula

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) dt, \quad (8.1)$$

donde $\vec{F}(\alpha(t))$ denota la restricción del campo vectorial \vec{F} a la curva α y $\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)$ denota el producto escalar de $\vec{F}(\alpha(t))$ con $\dot{\alpha}(t)$.

Si $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, donde F_i , $i = 1, 2, \dots, n$, son las funciones componentes de \vec{F} , y $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $t \in [a, b]$ es una parametrización de la curva α , entonces

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right),$$

y, por tanto, el integrando en el lado derecho de (8.1) se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) dt &= (F_1(\alpha(t)), F_2(\alpha(t)), \dots, F_n(\alpha(t))) \cdot \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right) dt \\ &= F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_n dx_n. \end{aligned}$$

De modo que otra forma de escribir (8.1) es

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\alpha} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \quad (8.2)$$

A una expresión como $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ se le llama *1-forma diferencial*.

Observación 8.1. Con relación a (8.1), el término $\vec{ds} = \dot{\alpha}(t) dt$ se llama elemento vectorial de longitud de arco (ver la observación 6.3, p. 94).

Observación 8.2. Si α es una curva cerrada, a (8.1) se le llama, a veces, circulación del campo \vec{F} alrededor de α .

La interpretación física de la integral de línea es la siguiente. Consideremos $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, un campo de fuerzas en el espacio tridimensional y una partícula p (por ejemplo, una carga pequeña inmersa en un campo eléctrico, o una masa pequeña en un campo gravitatorio) que está sujeta a esta fuerza y se mueve a lo largo de una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, mientras \vec{F} actúa sobre ella. Supongamos que interesa tener una fórmula para calcular el trabajo realizado por el campo \vec{F} sobre la partícula p . Si α fuera un segmento de línea recta equivalente a un vector d y F fuera constante sobre α , entonces el trabajo realizado por \vec{F} al mover p sobre d es el producto escalar

$$\text{trabajo realizado por } \vec{F} = \vec{F} \cdot d,$$

es decir, el producto de la intensidad de la fuerza por el desplazamiento en la dirección de la fuerza. En el caso general en que la curva α no es recta ni la fuerza \vec{F} constante, puede aproximarse la curva α por una curva poligonal, tal que sobre cada uno de los segmentos rectos la fuerza es aproximadamente constante. Al tomar la suma de los productos de $\vec{F}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)$, es decir, los trabajos realizados sobre cada uno de esos segmentos rectos que contienen el punto $\alpha(t)$ y que tienen la dirección de la tangente a α en ese punto, $\dot{\alpha}(t)$, podemos obtener la fuerza total realizada por \vec{F} sobre p al moverla a lo largo de α . Así se obtiene la fórmula siguiente:

$$\text{trabajo realizado por } F = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) dt,$$

que es, precisamente, la definición de integral de línea.

Ejemplo 8.1. (a) Si $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ y α es la hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, calcular la integral de línea $\int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds}$. (b) Calcular $\int_{\sigma} x^2 dx + xy dy + dz$ donde $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, 1)$, con $0 \leq t \leq 1$.

Solución. (a)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos t, \sin t, t)}_{=F(\alpha(t))} \cdot \underbrace{(-\sin t, \cos t, 1)}_{=\dot{\alpha}(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cancel{-\cos t \sin t} + \cancel{\cos t \sin t} + t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} t dt = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

(b) Con $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ y $z(t) = 1$ obtenemos $dx = dt$, $dy = 2t dt$ y $dz = 0$. Entonces

$$\int_{\sigma} x^2 dx + xy dy + dz = \int_0^1 t^2 dt + t^3(2t dt) + 0 dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^4) dt = \frac{11}{15}. \quad \diamond$$

8.2 Independencia de la integral de línea bajo reparametrizaciones

Las integrales de línea (tanto de funciones escalares como de campos vectoriales) son invariantes respecto de reparametrizaciones de la curva.

Proposición 8.1. Sean $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva \mathcal{C}^1 por pedazos, y $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una reparametrización de α . Entonces, para toda función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{\alpha} f ds = \int_{\beta} f ds,$$

y para todo campo vectorial $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene que, o bien

$$\int_{\beta} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds}, \text{ si } \beta \text{ preserva la orientación,}$$

o bien

$$\int_{\beta} \vec{F} \cdot \vec{ds} = - \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds}, \text{ si } \beta \text{ invierte la orientación.}$$

Demostración. Por hipótesis existe una biyección $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ de clase \mathcal{C}^1 , tal que $\beta = \alpha \circ h$; por la regla de la cadena se tiene $\dot{\beta}(t) = \dot{\alpha}(h(t))\dot{h}(t)$.

En el caso de integral de una función escalar, tanto si h preserva la orientación como si la invierte, se tiene que

$$f(\beta(t))\|\dot{\beta}(t)\| = f(\alpha(h(t)))\|\dot{\alpha}(h(t))\dot{h}(t)\| = f(\alpha(h(t)))\|\dot{\alpha}(h(t))\|\dot{h}(t)\|,$$

de donde, aplicando el teorema de cambio de variables, podemos concluir que

$$\int_{\alpha} f ds = \int_{\beta} f ds.$$

En el caso en el que F es un campo vectorial tenemos

$$\int_{\beta} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_c^d \vec{F}(\alpha(h(t))) \cdot \dot{\alpha}(h(t))\dot{h}(t) dt.$$

Entonces, si h conserva la orientación, $|\dot{h}(t)| = \dot{h}(t)$ para todo t , y aplicando el teorema de cambio de variables, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_a^b \vec{F}(\alpha(s)) \cdot \dot{\alpha}(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \vec{F}(\alpha(s)) \cdot \dot{\alpha}(s) ds \\ &= \int_c^d \vec{F}(\alpha(h(t))) \cdot \dot{\alpha}(h(t)) \dot{h}(t) dt = \int_{\beta} \vec{F} \cdot \vec{ds}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si h invierte la orientación, entonces $|\dot{h}(t)| = -\dot{h}(t)$, y en este caso tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_{h(d)}^{h(c)} \vec{F}(\alpha(s)) \cdot \dot{\alpha}(s) ds = \int_c^d \vec{F}(\alpha(h(t))) \cdot \dot{\alpha}(h(t)) |\dot{h}(t)| dt \\ &= - \int_c^d \vec{F}(\alpha(h(t))) \cdot \dot{\alpha}(h(t)) \dot{h}(t) dt = \int_{\beta} \vec{F} \cdot \vec{ds}. \quad \square \end{aligned}$$

La proposición 8.1 es muy útil en la práctica, pues nos permite usar cualquier reparametrización de una curva para calcular una integral a lo largo de él.

Definición 8.2. Se dice que $C \subset \mathbb{R}^n$ es una curva simple si C es la traza de una curva inyectiva, es decir, si existe una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva, tal que $\alpha([a, b]) = C$. Es decir, una curva simple es la traza de una curva que no se corta a sí misma. Los puntos $p = \alpha(a)$ y $q = \alpha(b)$ se llaman los extremos de la curva simple C .

Nótese que estos extremos son los mismos para cualquier reparametrización de α , solo puede cambiar el sentido en que se recorre C , o bien p es el punto inicial de α y q su punto final, o bien es al revés. Por tanto, toda curva simple con extremos p y q tiene dos posibles orientaciones o direcciones: C puede estar dirigida, o bien de p a q , o bien de q a p . La curva C , junto con una de estas dos orientaciones, se dice que es una *curva simple orientada*.

Definición 8.3. Se dice que $C \subset \mathbb{R}^n$ es una curva cerrada simple si existe una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\alpha([a, b]) = C$, $\alpha(a) = \alpha(b)$, y α es inyectiva en el intervalo $[a, b)$. Si α satisface la condición $\alpha(a) = \alpha(b)$, pero no es necesariamente inyectiva en $[a, b)$, se dice solamente que $C = \alpha([a, b])$ es una curva cerrada.

Como en el caso anterior, hay dos posibles orientaciones para una curva cerrada simple, dependiendo del sentido en que esta se recorre. La curva C , junto con una de estas dos orientaciones, se dice que es una *curva cerrada simple orientada*.

Si $C \subset A \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva simple orientada o una curva cerrada simple orientada, y $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial, puede definirse sin lugar a ambigüedades la integral de línea de \vec{F} a lo largo de C , $\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds}$; basta elegir cualquier parametrización α de C que conserve su orientación, y poner

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds};$$

la proposición 8.1 nos garantiza que $\int_{\alpha} F \cdot \vec{ds}$ vale lo mismo para cualquier parametrización α de C que conserve su orientación. Análogamente, si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar, se define

$$\int_C f \, ds = \int_{\alpha} f \, ds,$$

donde α es cualquier parametrización de C que conserve su orientación.

Observación 8.3. Debe notarse que en todo lo anterior es fundamental el hecho de que las curvas son simples (es decir, inyectivas, salvo quizás en un punto a lo sumo). Es posible que dos curvas α y β tengan como imagen la misma curva e induzcan la misma orientación sobre ella, y sin embargo, $\int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} \neq \int_{\beta} \vec{F} \cdot \vec{ds}$; por ejemplo, esto sucede para $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ y $\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $\vec{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$. Claramente α y β tienen la misma imagen, a saber la circunferencia unidad C , que es una curva cerrada simple, y la recorren en el mismo sentido, pero mientras que α lo hace solo una vez y por tanto, es una parametrización de la curva cerrada simple C , β la recorre dos veces; en particular, β no es inyectiva y no vale como parametrización de la curva cerrada simple C .

Si α es una curva simple orientada, o una curva cerrada simple orientada, denotaremos por α^{-} la misma curva, pero con la orientación opuesta (ver la observación 6.2, p. 92). Por otra parte, si α está compuesta de varias curvas simples (posiblemente cerradas) orientadas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, recorridas de forma sucesiva, tales que el punto final de cada una de ellas es el inicial de la siguiente, denotaremos $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. De hecho, dados varias curvas (quizás cerradas) simples orientadas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, podemos incluso eliminar la restricción de que el punto inicial de α_i sea el inicial de α_{i+1} , y definir formalmente la suma de curvas $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, e incluso también la diferencia de curvas como la suma de una con la otra orientada al revés, es decir, $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2^{-}$.

Definición 8.4. Si $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ y $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, se define

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\alpha_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{\alpha_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \dots + \int_{\alpha_k} \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

En consecuencia se define también

$$\int_{\alpha_1 + \alpha_2^{-}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\alpha_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} - \int_{\alpha_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

Fórmulas similares se tienen para definir la integral de línea de un campo escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_{\alpha} f \, ds = \int_{\alpha_1} f \, ds + \int_{\alpha_2} f \, ds + \dots + \int_{\alpha_k} f \, ds,$$

$$\int_{\alpha_1 + \alpha_2^{-}} f \, ds = \int_{\alpha_1} f \, ds - \int_{\alpha_2} f \, ds.$$

El hecho de poder representar una curva α como “suma de curvas” α_i tiene la conveniencia de que, a menudo, resulta más fácil parametrizar dichas curvas componentes α_i una por una que parametrizar α directamente. Por ejemplo, si α es el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$ en \mathbb{R}^2 , orientado según el orden de dichos vértices, para calcular $\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ es más fácil evaluar $\int_{\alpha_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, donde α_i es cada segmento del cuadrado, y después sumar estas cuatro integrales de línea.

En el ejemplo siguiente se ilustran varias de las ideas expuestas en esta sección.

Ejemplo 8.2. Considere los puntos $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 3, 2)$ y $R(-1, -2, 5)$ y sea α la trayectoria que consiste del segmento recto \vec{PQ} , unido con el segmento recto \vec{QR} . Calcule la integral de línea $\int_{\alpha} z dx + (x + 2y) dy + xz dz$.

Solución. De acuerdo con la definición 8.4 podemos representar la curva α como $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, donde α_1 es el segmento recto que une a P con Q , y α_2 es el segmento recto que une a Q con R .

Por la proposición 8.1, para efectos de calcular la integral de línea que se pide, no importa cómo se parametrizen los segmentos α_1 y α_2 . Escribiremos

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= P + t(Q - P) = (1 + t, 3t, 1 + t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha_2(t) &= Q + t(R - Q) = (2 - 3t, 3 - 5t, 2 + 3t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} z dx + (x + 2y) dy + xz dz &= \int_{\alpha_1} z dx + (x + 2y) dy + xz dz + \int_{\alpha_2} z dx + (x + 2y) dy + xz dz \\ &= \int_0^1 [(1 + t) dt + (1 + 7t)3 dt + (1 + t)^2 dt] \\ &\quad + \int_0^1 [(2 + 3t)(-3 dt) + (8 - 13t)(-5 dt) + (4 - 9t^2)3 dt] \\ &= \int_0^1 (5 + 24t + t^2) dt + \int_0^1 (-34 + 56t - 27t^2) dt = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

El mismo resultado se obtiene si α se parametriza como una función continua en t :

$$\alpha(t) = \begin{cases} (1 + t, 3t, 1 + t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ (5 - 3t, 8 - 5t, -1 + 3t) & \text{si } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

En este caso obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} z dx + (x + 2y) dy + xz dz &= \int_0^1 [(1 + t) dt + (1 + 7t) dt + (1 + t)^2 dt] + \\ &\quad \int_0^1 [(-1 + 3t)(-3 dt) + (21 - 13t)(-5 dt) + (-5 + 18t - 9t^2)(3 dt)] \\ &= \int_0^1 (5 + 24t + t^2) dt + \int_1^2 (-117 + 110t - 27t^2) dt = \frac{7}{3}. \quad \diamond\end{aligned}$$

8.3 Integración de campos gradientes

Teorema 8.1. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase \mathcal{C}^1 , y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva \mathcal{C}^1 por pedazos. Entonces

$$\int_{\alpha} \nabla f \cdot \vec{ds} = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Demostración. Consideremos la función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(\alpha(t))$, cuya derivada es $\dot{g}(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)$.

Aplicando el teorema fundamental del cálculo a esta función g , obtenemos:

$$\begin{aligned} f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) &= g(b) - g(a) = \int_a^b \dot{g}(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) dt = \int_a^b \nabla f \cdot \vec{ds}. \quad \square \end{aligned}$$

Del teorema 8.1 se deduce que si $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial gradiente y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función potencial de F , entonces, para todo par de puntos $p, q \in A$ y para toda curva \mathcal{C}^1 por pedazos α con traza contenida en A y que comience en p y acabe en q , se tiene

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} = f(q) - f(p).$$

Observación 8.4. No todo campo vectorial $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo gradiente. El teorema 8.1 proporciona un criterio para decidir si un campo no es gradiente: basta encontrar dos curvas γ_1 y γ_2 , con los mismos puntos inicial y final, a lo largo de las cuales las integrales de línea $\int_{\alpha_1} F \cdot \vec{ds}$ y $\int_{\alpha_2} F \cdot \vec{ds}$ toman valores diferentes.

Ejemplo 8.3. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por $\vec{F}(x, y, z) = (y, xy, z)$. Probar que no existe función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Solución. Consideremos los puntos $P(0, 0, 0)$ y $Q(1, 1, 1)$. Las curvas $\alpha_1(t) = (t, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$, y $\alpha_2(t) = \begin{cases} (t, 0, 0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ (1, 1-t, 1-t) & \text{si } 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$ unen a los puntos P y Q . Pero

$$\int_{\alpha_1} F \cdot \vec{ds} = \int_0^1 (t, t^2, t) \cdot (1, 1, 1) dt = \int_0^1 (2t + t^2) dt = \frac{4}{3},$$

mientras que

$$\int_{\alpha_2} F \cdot \vec{ds} = \int_0^1 (0, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dt + \int_1^2 (1-t, 1-t, 1-t) \cdot (0, -1, -1) dt = -2 \int_1^2 (1-t) dt = 1.$$

El teorema 8.1 implica que F no es campo gradiente. \diamond

De hecho, la condición de independencia de la trayectoria que nos da el teorema 8.1 no solo es necesaria; también es suficiente (al menos cuando el dominio A tiene una forma sencilla). El siguiente resultado complementa el teorema 8.1, caracterizando los campos gradientes como aquellos campos vectoriales para los que las integrales de línea solo dependen de los puntos inicial y final de la curva sobre la que se integran, o también, si el dominio sobre el que están definidos es convexo, como aquellos cuyas componentes tienen derivadas parciales que satisfacen una condición de simetría.

Definición 8.5. Sea $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo, y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow A$ una curva \mathcal{C}^1 por pedazos. Se dice que $\int_{\alpha} F \cdot ds$ es independiente de la curva (o de la trayectoria) α , si para cualquier curva $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{C}^1 por pedazos, se tiene que

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\beta} \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

Teorema 8.2. Sea A un abierto de \mathbb{R}^n y $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. \vec{F} es un campo gradiente, es decir, existe una función potencial $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 , tal que $\vec{F} = \nabla f$;
2. $\int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0$ para toda curva cerrada α ;
3. $\int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ es independiente de la trayectoria α .

Si además \vec{F} es de clase \mathcal{C}^1 y A es un conjunto abierto y convexo, las afirmaciones anteriores también equivalen a la siguiente:

4. Para todos $i, j = 1, \dots, n$ se tiene que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

De un campo \vec{F} que satisfaga una de estas propiedades (y por tanto todas), se dice que es un campo conservativo.

Demostración.

(1) \implies (2): Es consecuencia del teorema 8.1.

(2) \implies (3): Sean $\alpha : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos curvas \mathcal{C}^1 por pedazos con el mismo comienzo $p = \alpha(a_1) = \beta(a_2)$ y el mismo final $q = \alpha(b_1) = \beta(b_2)$. Entonces, si $-\beta$ es la curva inversa

a β , se tiene que $\gamma = \alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$ es una curva cerrada en A ; luego, por hipótesis, $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0$.

Pero

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{-\beta} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} - \int_{\beta} \vec{F} \cdot \vec{ds},$$

y se deduce que $\int_{\alpha} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\beta} \vec{F} \cdot \vec{ds}$.

(3) \implies (1): sea $a \in A$. No hay pérdida de generalidad en suponer que A es conexo (si no lo fuera podríamos trabajar en cada una de sus componentes conexas). Como A es un abierto de \mathbb{R}^n , resulta que A es conexo poligonalmente; en particular, A es conexo por curvas \mathcal{C}^1 por pedazos. Así, dado cualquier $x \in A$, podemos escoger una curva \mathcal{C}^1 por pedazos $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\gamma_x(0) = a$ y $\gamma_x(1) = x$. Definamos entonces $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

para cada $x \in A$. Por la condición (3), debe ser claro que la definición de f no depende de la elección de γ_x . Veamos que f es diferenciable en A y que $\nabla f(x) = \vec{F}(x)$ para cada $x \in A$. Fijemos $x \in A$. Como \vec{F} es continuo en x , dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $\|h\| \leq \delta$, entonces $\|\vec{F}(x+h) - \vec{F}(x)\| \leq \varepsilon$. Nótese que, por la condición (3), si σ denota el segmento $[x, x+h]$, entonces

$$\int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{\gamma_{\sigma}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\gamma_x \cup \sigma} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\gamma_{x+h}} \vec{F} \cdot \vec{ds},$$

dado que $\gamma_x + h$ y $\gamma_x \cup \sigma$ son curvas que empiezan en a y terminan en $x+h$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \int_{\gamma_{x+h}} \vec{F} \cdot \vec{ds} - \int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot \vec{ds} \\ &= \int_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_0^1 \vec{F}(x+th) \cdot h \, dt, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \left| f(x+h) - f(x) - \vec{F}(x) \cdot h \right| &= \left| \int_0^1 (\vec{F}(x+th) - \vec{F}(x)) \cdot h \, dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \|\vec{F}(x+th) - \vec{F}(x)\| \cdot \|h\| \, dt \leq \int_0^1 \varepsilon \|h\| \, dt = \varepsilon \|h\|, \end{aligned}$$

para todo h tal que $\|h\| \leq \delta$. Esto prueba que f es diferenciable en x y $\nabla f(x) = \vec{F}(x)$.

(1) \implies (4): Si $\nabla f = F$ (es decir, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_i, i = 1, \dots, n$) y \vec{F} es \mathcal{C}^1 , entonces f es de clase \mathcal{C}^2 y,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

lo que significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

(4) \implies (1): Fijemos un punto $a \in A$. Para cada $x \in A$, sea σ_x el segmento que une a con x ,

$$\sigma_x(t) = tx + (1-t)a, \quad t \in [0, 1].$$

La traza de σ_x está dentro de A por ser este conjunto convexo. Definamos $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_{\sigma_x} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

para cada $x \in A$. Tenemos que comprobar que $\nabla f(x) = F(x)$, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = F_j(x)$$

para cada $x \in A, j = 1, \dots, n$. Por la fórmula de derivación bajo el signo integral (ver 8.5) y la hipótesis de simetría de las derivadas, e integrando por partes al final, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j(a + t(x-a))(x_j - a_j) dt \right) \\ &= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n t \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a + t(x-a)(x_j - a_j)) \right) + F_i(a + t(x-a)) \right] dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n t \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a + t(x-a)(x_j - a_j)) \right) dt + \int_0^1 F_i(a + t(x-a)) dt \\ &= \int_0^1 t \nabla F_i(a + t(x-a)(x_j - a_j)) dt + \int_0^1 F_i(a + t(x-a)) dt \\ &= F_i(x) - \int_0^1 F_i(a + t(x-a)(x_j - a_j)) dt + \int_0^1 F_i(a + t(x-a)) dt \\ &= F_i(x), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos. \square

Observación 8.5. Cuando $F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ es un campo vectorial definido en un abierto del plano \mathbb{R}^2 , la condición (4) del teorema 8.2 significa simplemente que

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}.$$

Observación 8.6. La prueba de la parte (1) \iff (4) del teorema 8.2 muestra que la hipótesis de que A sea convexo puede sustituirse por una más débil, por ejemplo, que A sea un abierto estrellado, es decir, que exista un punto $a \in A$, tal que para cualquier otro punto $x \in A$ el segmento $[a, x]$ está contenido en A . Sin embargo, el teorema 8.2 no es cierto para todo conjunto abierto A ; si A no es simplemente conexo, entonces el enunciado del teorema no es cierto en general, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.4. Sean $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, y $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\vec{F}(x, y) = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Comprobar que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en A , y que sin embargo \vec{F} no es un campo gradiente.

Solución.

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Sea $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, para $0 \leq t < 2\pi$. Entonces

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Por el teorema 8.2, se concluye que \vec{F} no es un campo gradiente. \diamond

No obstante, en \mathbb{R}^3 las cosas son un poco diferentes: puede probarse que si \vec{F} es un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 , definido en todo \mathbb{R}^3 , salvo quizás una cantidad finita de puntos, entonces las cuatro condiciones del teorema 8.2 son equivalentes. Por ejemplo, para el campo gravitatorio de la tierra, definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z),$$

y que tiene una singularidad en el origen, el teorema es válido.

Ejercicios

8.1. Consideremos la fuerza $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula sobre la parábola $y = x^2, z = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

- 8.2.** Una partícula se mueve del punto $P(1, 1)$ al punto $Q(4, 8)$, a lo largo de la curva $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, sujeta al campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = (x^2, \text{sen } y)$. Calcular el trabajo realizado.
- 8.3.** Una partícula se mueve a lo largo del segmento que une $P(1, 1)$ con $Q(2, 5)$, sujeta al campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$. Calcular el trabajo realizado.
- 8.4.** Una partícula se mueve a lo largo del arco de parábola $\gamma(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, sujeta al campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{1}{y+1}, \frac{-1}{x+1} \right)$. Calcular el trabajo realizado.
- 8.5.** Una partícula se mueve a lo largo del segmento recto que une $P(0, 0, 0)$ con $Q(3, 6, 10)$, sujeta al campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$. Calcular el trabajo realizado.
- 8.6.** Una partícula se mueve de $P(1, 1, 1)$ a $Q(2, 4, 8)$, a lo largo de la curva $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, sujeta al campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (\text{sen } x, \text{sen } y, \text{sen } z)$. Calcular el trabajo realizado.
- 8.7.** Una partícula se mueve de $P(1, 0, 0)$ a $Q(-1, 0, \pi)$, a lo largo de la curva $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen } t, t)$, sujeta al campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, y^2, xz)$. Calcular el trabajo realizado.

Capítulo 9

Integración sobre superficies

9.1 El concepto de superficie

De manera intuitiva, una superficie en el espacio euclidiano tridimensional es un conjunto de puntos $S \subset \mathbb{R}^3$ que se puede poner en correspondencia biyectiva con una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$ conexa, con interior no vacío. Así, una superficie es el análogo bidimensional de una curva en el espacio. Sin embargo, las superficies son objetos mucho más complicados que las curvas. En estas notas tomaremos la definición siguiente.

Definición 9.1. Se dice que un conjunto S de \mathbb{R}^3 es una superficie parametrizada regular si existen un conjunto abierto D de \mathbb{R}^2 , tal que ∂D es una curva cerrada simple regular por pedazos, y una función $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva y de clase C^1 , tal que su diferencial $\Phi'(u, v)$ tiene rango dos para todo $(u, v) \in D$, y además, $S = \Phi(D)$. En este caso diremos que Φ es una parametrización de S .

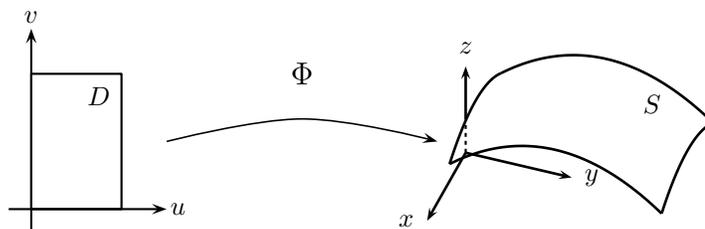


Figura 9.1: Una superficie S en \mathbb{R}^3

Evidentemente, una misma superficie paramétrica simple S puede tener varias parametrizaciones diferentes.

Ejemplo 9.1. Escriba dos parametrizaciones del paraboloides hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

Solución. Una parametrización es

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad (u, v) \in D = \mathbb{R}^2;$$

otra es

$$\Phi(u, v) = (\sqrt{u} \cosh v, \sqrt{u} \sinh v, u), \quad u \geq 0, v \in \mathbb{R}. \quad \diamond$$

Si $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, entonces u y v son los *parámetros* y las funciones x, y y z son las *funciones coordenadas* de la parametrización. En este caso, el diferencial Φ' es

$$\Phi'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

Si $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S y $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow D$ es una parametrización de una curva en D , donde I es un intervalo, entonces $\beta = \Phi \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una curva sobre la superficie S .

Toda parametrización Φ de una superficie tiene asociadas de manera natural dos familias de curvas particularmente útiles.

Definición 9.2. Si $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S y si $(u_0, v_0) \in D$, las curvas

$$u \mapsto \Phi(u, v_0), \quad v \mapsto \Phi(u_0, v) \quad (9.2)$$

se llaman curvas u - y v -paramétricas, respectivamente.

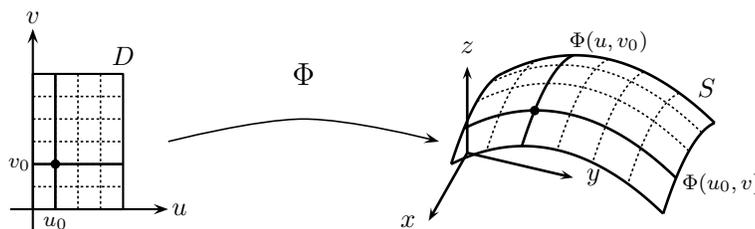


Figura 9.2: Curvas paramétricas

Los vectores tangentes a las curvas u - y v -paramétricas, (ver observación 6.1, p. 89), que denotaremos con Φ_u y Φ_v , respectivamente, son la primera y segunda columnas, respectivamente, de la matriz Φ' . Los vectores Φ_u y Φ_v se llaman *vectores de velocidad parcial* o, simplemente, *velocidades parciales* de la parametrización Φ . Ver figura 9.3.

Entonces la condición de regularidad (es decir, que el diferencial $\Phi'(u, v)$ tenga rango dos para todo $(u, v) \in D$) se puede formular pidiendo que los vectores de velocidad parcial sean linealmente independientes, o, equivalentemente, que $\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v) \neq \vec{0}$.

Como los vectores Φ_u y Φ_v son tangentes a la superficie en el punto $p = \Phi(u_0, v_0)$, se concluye que el vector $\Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0) = (\Phi_u \times \Phi_v)(u_0, v_0)$, llamado a veces *producto vectorial fundamental*,

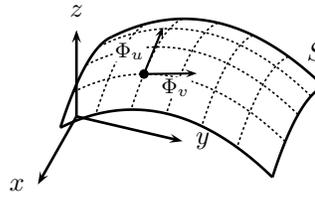


Figura 9.3: Las velocidades parciales

es perpendicular a S en p y, por tanto, es el vector normal al plano tangente a S en p , que se denota con $T_p S$. Denotaremos al vector normal en (u_0, v_0) con $\vec{N}(u_0, v_0)$:

$$\vec{N}(u_0, v_0) = \Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0).$$

Entonces la condición de regularidad de una superficie S se puede reformular pidiendo que en cada punto $p \in S$ exista un plano tangente $T_p S$. La ecuación del plano tangente en $p = \Phi(u_0, v_0)$ es

$$[(x, y, z) - \Phi(u_0, v_0)] \cdot \vec{N}(u_0, v_0) = 0. \quad (9.3)$$

Observación 9.1. *Es importante notar la diferencia entre las dos descripciones de regularidad que se han presentado. La condición de que $\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v) \neq \vec{0}$ es dependiente de la parametrización Φ , mientras que la condición de regularidad en $p \in S$ que pide la existencia de un plano tangente $T_p S$ no depende de la parametrización. Insistiremos sobre esta cuestión un poco más adelante, cuando veamos el ejemplo de la esfera.*

9.2 Algunos ejemplos de superficies

Presentamos ahora varios ejemplos de superficies.

(a) Superficies definidas explícitamente

Una función de la forma $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ representa una superficie que se puede parametrizar como

$$\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \text{con} \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (9.4)$$

Si f es diferenciable, entonces la superficie en cuestión es regular, pues

$$\vec{N}(u, v) = (-f_x(u, v), -f_y(u, v), 1). \quad (9.5)$$

Por supuesto, las mismas consideraciones se aplican para funciones de la forma $y = f(x, z)$ o $x = f(y, z)$.

(b) Superficies definidas implícitamente

Esta es una situación más general que la anterior. Una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$ se llama *ecuación implícita*, si ninguna de las variables, x , y o z aparece en forma explícita, es decir, “despejada” en la ecuación. El teorema de la función implícita nos ayuda a decir cuándo una ecuación implícita define localmente una superficie.

Teorema 9.1. Si la función $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en la vecindad de un punto $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ para el que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ y si alguna de las derivadas parciales F_x , F_y o F_z no se anula en (x_0, y_0, z_0) , entonces existe una vecindad V de (x_0, y_0, z_0) en \mathbb{R}^3 tal que, el conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \Omega \cap V, F(x, y, z) = 0\}$$

es una superficie y admite una parametrización regular.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, existe una vecindad V de (x_0, y_0, z_0) en la que la coordenada z de los puntos que satisfacen la ecuación $F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ se puede escribir como función de las coordenadas x y y : $z = f(x, y)$, donde f es una función continuamente diferenciable. Las derivadas parciales de f son $f_x = -F_x/F_z$ y $f_y = -F_y/F_z$. Entonces $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ es una parametrización de una superficie S . De aquí se ve que la superficie S es regular. \square

(c) Superficies de revolución

Una *superficie de revolución* es la generada por una curva plana γ , llamada *generatriz*, cuando gira alrededor de una recta fija δ , llamada *directriz* o *eje de revolución*, contenida en el mismo plano de la generatriz. Al girar alrededor del eje de revolución, cada punto P de la generatriz describirá una circunferencia. Esto se ilustra en la figura 9.4.

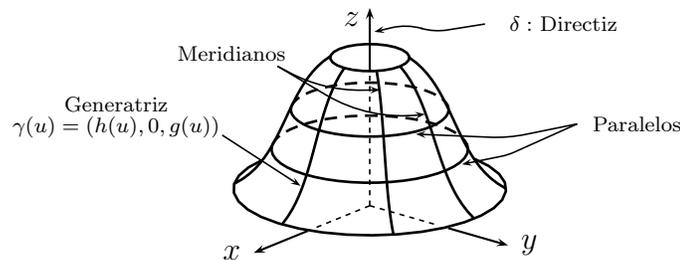


Figura 9.4: Una superficie de revolución

A las circunferencias generadas por los puntos de la generatriz se les llama *paralelos* y a las diferentes posiciones de la generatriz, *meridianos*.

Supongamos ahora que la generatriz es de la forma $\gamma(u) = (h(u), 0, g(u))$, donde el parámetro u toma valores en algún intervalo, digamos $[a, b]$, y que la directriz δ es el eje z ; entonces para cada u en $[a, b]$ se generará una circunferencia de radio $h(u)$ que se mantendrá a una distancia $g(u)$ del plano $z = 0$ y cuyo centro será $(0, 0, g(u))$. Si el parámetro de esta circunferencia lo denotamos con v , la parametrización de la superficie de revolución será:

$$\Phi(u, v) = (h(u) \cos v, h(u) \sin v, g(u)), \quad u \in [a, b], \quad v \in [0, 2\pi]. \quad (9.6)$$

Intercambiando los papeles de u y de v , construimos otra parametrización: hacemos $\gamma(v) = (h(v), 0, g(v))$ y la giramos alrededor del eje z para obtener

$$\Phi(u, v) = (h(v) \cos u, h(v) \operatorname{sen} u, g(v)), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [a, b].$$

Debe ser claro que si la generatriz está en otro plano de coordenadas y el eje de rotación es otro eje de coordenadas en ese plano, siguiendo este procedimiento podemos encontrar ecuaciones semejantes.

Por otra parte, si contamos con la representación cartesiana de la generatriz $\gamma : f(x, z) = 0, y = 0$, como al girar alrededor del eje z esta coordenada no se altera y el valor de x se convierte en el radio del paralelo (circunferencia) correspondiente, basta con sustituir x por $\sqrt{x^2 + y^2}$ en la ecuación de la generatriz para obtener la ecuación de la superficie de revolución:

$$F(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Dos ejemplos concretos de superficies de revolución importantes son los siguientes.

- (i) La esfera es una superficie de revolución, pues si tomamos como generatriz la semicircunferencia $\gamma(u) = (R \cos u, 0, R \operatorname{sen} u)$, $R > 0$, $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ y la giramos alrededor del eje z , tomando v en $[-\pi, \pi]$, obtenemos la parametrización de la esfera

$$\left. \begin{aligned} \Phi(u, v) &= (R \cos u \cos v, R \cos u \operatorname{sen} v, R \operatorname{sen} u), \\ u &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad v \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

En este caso, u y v son las llamadas *coordenadas geográficas*, u es la *latitud* y v la *longitud*, tal como se miden para localizar un punto sobre el globo terrestre. La figura 9.5 ilustra esta parametrización.

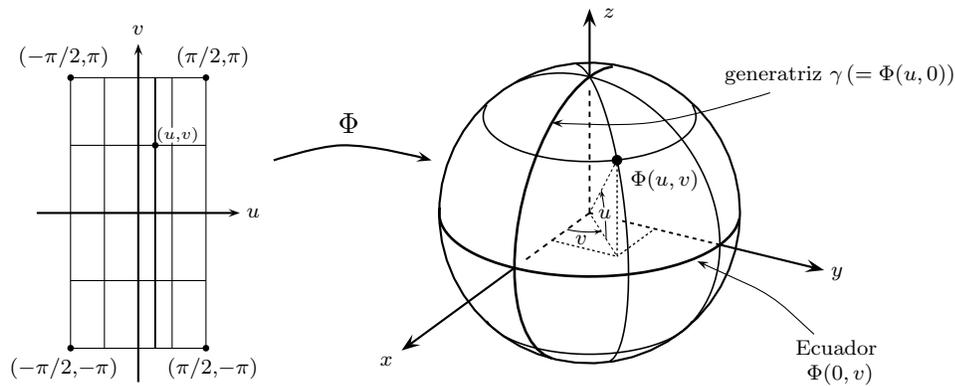


Figura 9.5: Parametrización de una esfera

Para la parametrización (9.7) encontramos que

$$\begin{aligned} \Phi_u(u, v) &= -R(\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -\cos u), \\ \Phi_v(u, v) &= -R(\cos u \operatorname{sen} v, -\cos u \cos v, 0), \\ (\Phi_u \times \Phi_v)(u, v) &= -R^2 \cos u(\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u). \end{aligned}$$

Para la parametrización (9.7) los puntos $\Phi(\pm\pi/2, v)$ pueden describirse como los *polos*, *norte* y *sud*, de la esfera. Nótese que en estos puntos se tiene que $\vec{N}(\pm\pi/2, v) = (\Phi_u \times$

$\Phi_u)(\pm\pi/2, v) = 0$. Pero de esto no se puede concluir que, en los polos, la esfera no es regular. Obviamente, la esfera es regular en todos sus puntos, pues en cualquiera de ellos existe un plano tangente. La aparente contradicción se puede resolver encontrando otra parametrización de la esfera para la que los polos norte y sur sean puntos regulares. Esta parametrización puede ser, por ejemplo, $\Phi(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin u \sin v)$, $(u, v) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. \diamond

- (ii) Un *toro* (del latín *torus*) es la superficie de revolución que se obtiene cuando un círculo rota alrededor de una recta que no lo intersecta.

Supongamos que la generatriz está parametrizada en la forma

$$\gamma(u) = (R + r \cos u, 0, r \sin u), \quad \text{donde } u \in [0, 2\pi], \quad \text{con } R > r.$$

Entonces la parametrización del toro resulta

$$\Phi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]. \quad (9.8)$$

Los detalles de esta parametrización se ilustran en la figura 9.6.

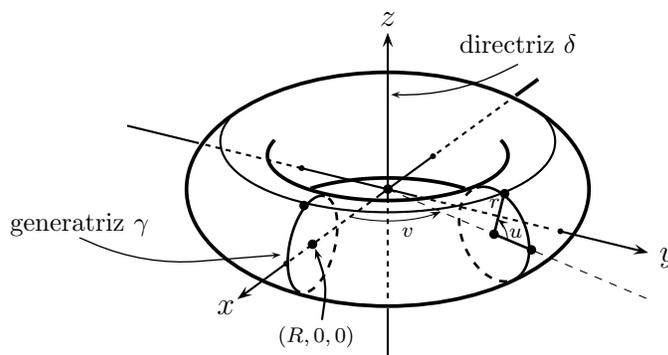


Figura 9.6: Parametrización de un toro

Para la parametrización (9.8), se obtiene

$$(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v) = -(R + r \cos u)(R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, r \sin u),$$

y, de la suposición $R > r$ se concluye que $(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v) \neq \vec{0}$ para $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. \diamond

- (d) Una *superficie reglada* se obtiene cuando una recta (o un segmento de recta), llamada *generatriz*, se desplaza continuamente sobre una curva, llamada *base* de la superficie. De esta manera, por cada punto de una superficie reglada pasa una recta, llamada *regla*, totalmente contenida en la superficie. En otras palabras, una superficie reglada se obtiene al asignar un campo vectorial continuo sobre una curva.

La parametrización de una superficie reglada es

$$\Phi(u, v) = \gamma(u) + v\alpha(u). \quad (9.9)$$

Si pensamos que, con cada valor de u se generan un punto, $\gamma(u)$ y un vector de dirección, $\alpha(u)$, entonces (9.9) es la parametrización de la recta que pasa por $\gamma(u)$ en dirección del vector $\alpha(u)$. El parámetro de la recta es v .

La condición de regularidad es $\vec{N}(u, v) = (\gamma'(u) + v\alpha'(u)) \times \alpha(u) \neq \vec{0}$.

(e) Casos particulares de superficies regladas:

- (i) los cilindros, que se obtienen tomando $\alpha(u) = p$ (lo cual significa que todas las reglas son paralelas);
- (ii) los conos, que se obtienen haciendo $\gamma(u) = q$ (es decir, todas las reglas pasan por un punto fijo).

9.3 El área de una superficie

Para encontrar el área de (una porción de) una superficie procedemos de la manera usual; es decir, calculamos el área mediante un proceso límite de sumas de Riemann. Sea $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S y supongamos que D es el rectángulo $D = [a, b] \times [c, d]$. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud, Δu , mediante los puntos $a = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = b$ y el intervalo $[c, d]$ en m subintervalos de igual longitud, Δv , mediante los puntos $c = v_0, v_1, v_2, \dots, v_m = d$. Esta partición de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ genera una partición (es decir, una malla rectangular) en D . La imagen de esta malla bajo Φ es una malla curvilínea sobre la superficie S (ver figura 9.2, p. 122). Cada uno de los nm rectángulos curvos sobre la superficie es ahora aproximado por un pequeño paralelogramo tangente a la superficie generado por los vectores $\Delta u\Phi_u$ y $\Delta v\Phi_v$. El área de cada uno de estos paralelogramos es

$$\|\Delta u\Phi_u \times \Delta v\Phi_v\| = \|\Phi_u \times \Phi_v\|\Delta u\Delta v,$$

donde las cantidades involucradas se evalúan en el vértice de los vectores $\Delta u\Phi_u$ y $\Delta v\Phi_v$. Finalmente, se suman todas estas áreas (obteniendo así una suma de Riemann) y se toma el límite cuando $n, m \rightarrow \infty$. Se obtiene que el área A de la imagen de D bajo Φ es

$$A = \iint_D \|(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v)\| du dv. \quad (9.10)$$

Ejemplo 9.2. Encuentre el área de una superficie de revolución (9.6) (p. 124), y use el resultado para calcular el área de un toro parametrizado por (9.8) (p. 126).

Solución. Para la parametrización $\Phi(u, v) = (h(u) \cos v, h(u) \sin v, g(u))$ encontramos

$$\begin{aligned} \Phi_u &= (\dot{h}(u) \cos v, \dot{h}(u) \sin v, \dot{g}(u)), \\ \Phi_v &= (-h(u) \sin v, h(u) \cos v, 0), \\ \Phi_u \times \Phi_v &= (-h(u)\dot{g}(u) \cos v, h(u)\dot{g}(u) \sin v, h(u)\dot{h}(u)) \\ &= h(u)(-\dot{g}(u) \cos v, \dot{g}(u) \sin v, \dot{h}(u)), \\ \|\Phi_u \times \Phi_v\| &= h(u)[\dot{h}^2(u) + \dot{g}^2(u)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Entonces, el área de la superficie de revolución (9.6) es

$$A = \int_0^{2\pi} \int_a^b h(u) [\dot{h}^2(u) + \dot{g}^2(u)]^{1/2} du dv$$

Para el toro, que se obtiene con $h(u) = R + r \cos u$ y $g(u) = r \sin u$, con $u \in [0, 2\pi]$, encontramos que $\dot{h}^2(u) + \dot{g}^2(u) = r^2$. Entonces

$$A = r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [R + r \cos u] du dv = 4\pi Rr. \quad \diamond$$

Observación 9.2. En el caso de que S sea la gráfica de una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, es decir,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\},$$

de la parametrización Φ dada en (9.4) sabemos que $\Phi_u \times \Phi_v(u, v) = (-f_x(u, v), -f_y(u, v), 1)$ (ver (9.5), p. 123). Entonces el área de esta superficie es

$$A = \iint_D \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} dx dy.$$

Ejemplo 9.3. Usar esta fórmula para hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$. Ver figura 9.7.

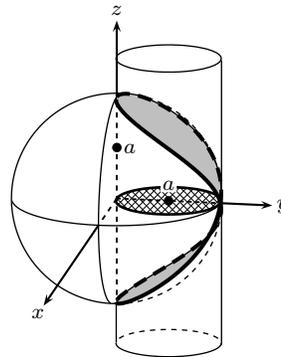


Figura 9.7: La región sombreada es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$.

Solución. Nótese que la esfera es la unión de dos gráficas $z = \pm \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$. Para $f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}$$

y

$$\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{4a^2}{4a^2 - x^2 - y^2} \right]^{1/2}.$$

Por simetría, el área buscada es

$$A = 2 \times 2 \times \iint_D \left[\frac{4a^2}{4a^2 - x^2 - y^2} \right]^{1/2} dA, \text{ donde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2ay, x \geq 0\}.$$

Cambiando a coordenadas polares encontramos que $D = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2a \sin \theta\}$. Entonces

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a \sin \theta} \frac{2ar}{\sqrt{4a^2 - r^2}} dr d\theta = 8a^2(\pi - 2). \quad \diamond$$

9.4 Integración de campos sobre superficies

9.4.1 Integración de campos escalares sobre superficies

Definición 9.3. Sea S una superficie paramétrica simple, parametrizada por $\Phi : D \rightarrow S$, y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo definido sobre S . Definimos la integral de f sobre S , denotada $\int_S f dS$, como

$$\int_S f dS = \int_D f(\Phi(u, v)) \|(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v)\| du dv \quad (9.11)$$

Observación 9.3. Nótese que si en la definición 9.3 tomamos $f(x, y, z) = 1$, entonces (9.11) se reduce a la fórmula para el cálculo del área, (9.10)

Observación 9.4. Con relación a (9.11), al símbolo $dS = \|(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v)\| du dv$ se le llama elemento escalar de superficie (ver observaciones 6.3 y 8.1, pp. 94 y 110, resp.)

Ejemplo 9.4. Calcule la integral de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ sobre la superficie $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

Solución. La superficie S es la esfera, cuya parametrización Φ se da en (9.7) (p. 125). Entonces, $f(\Phi(u, v)) = R^2 \cos^2 u$. Para esta parametrización encontramos que $\|(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v)\| = R^2 \cos u$. Luego

$$\begin{aligned} \int_S f dS &= \int_D f(\Phi(u, v)) \|(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v)\| du dv \\ &= R^4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 u du dv = R^4(2\pi) \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \pi R^4. \quad \diamond \end{aligned}$$

Observación 9.5. Una interpretación física típica de (9.11) es la siguiente. Si el campo escalar $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ representa la densidad de masa por unidad de superficie de un material de grosor despreciable que está distribuido sobre una superficie S , y entonces $\int_S f dS$ sería una medida de la masa total de dicho material.

9.4.2 Integración de campos vectoriales sobre superficies

Definición 9.4. Si $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo definido sobre S , definimos la integral de \vec{F} sobre S , denotada con $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, por

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) du dv \quad (\vec{N} = \Phi_u \times \Phi_v). \quad (9.12)$$

Observación 9.6. La integral de un campo vectorial \vec{F} sobre una superficie S , suele interpretarse como el flujo de un fluido que pasa a través de S , siguiendo las líneas de flujo asociadas con \vec{F} (ver definición 7.1, p. 101).

Ejemplo 9.5. Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie $12x - 6y + 3z = 24$, $x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0$.

Solución. La superficie S puede parametrizarse en la forma $\Phi(u, v) = (u, v, 8 - 4u + 2v)$, $(u, v) \in D$, donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es la región $\{(u, v) : 0 \leq u \leq 2, 2u - 4 \leq v \leq 0\}$. Para la parametrización Φ encontramos $\vec{N} = \Phi_u \times \Phi_v = (4, -2, 1)$. Entonces el flujo es

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_D \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \vec{N}(u, v) du dv \\ &= \int_D (u, v, 8 - 4u + 2v) \cdot (4, -2, 1) du dv \\ &= \int_0^2 \int_{2u-4}^0 8 dv du = 8 \times \text{área del triángulo } D = 32. \quad \diamond \end{aligned}$$

Observación 9.7. Este resultado puede interpretarse de la siguiente manera. Un fluido que fluye con velocidad dada por \vec{F} hace pasar fluido a través de la superficie S dada a razón de $32 \text{ m}^3/\text{s}$. Sin embargo, esta interpretación es correcta solo si al campo vectorial se le dan las unidades correctas para un campo de velocidades.

Consideremos ahora la cuestión de la invariancia de estas integrales respecto de la parametrización escogida de S . Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 9.1. Sean $\Psi : D_\Psi \rightarrow S$ y $\Phi : D_\Phi \rightarrow S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S , y sea $\varphi : D_\Psi \rightarrow D_\Phi$ el difeomorfismo de clase \mathcal{C}^1 definido por $\varphi = \Phi^{-1} \circ \Psi$. Denotemos $(u, v) = \varphi(s, t)$. Entonces

$$\Psi_s \times \Psi_t = (\Phi_u \times \Phi_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}$$

donde $\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}$ denota el jacobiano de φ .

Demostración. Por la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}\Psi_s &= \Phi_u \frac{du}{ds} + \Phi_v \frac{dv}{ds} \\ \Psi_t &= \Phi_u \frac{du}{dt} + \Phi_v \frac{dv}{dt}\end{aligned}$$

Tomando el producto vectorial de los miembros de la derecha de ambas igualdades, utilizando las propiedades del producto vectorial, y en particular usando que

$$\Phi_u \times \Phi_u = \vec{0} = \Phi_v \times \Phi_v$$

se obtiene la igualdad de enunciado. \square

Observación 9.8. Si para una transformación $\varphi : D_\Psi \rightarrow D_\Phi$, como la descrita en el enunciado del lema 9.1, se satisface que $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \neq 0$ para todo $(s,t) \in D_\Psi$, entonces φ es un cambio de coordenadas mediante el que se obtiene la parametrización $\Psi = \Phi \circ \varphi$ a partir de la parametrización Φ . En este caso, el lema 9.1 garantiza que un cambio de coordenadas no altera la regularidad de una superficie.

El teorema siguiente garantiza que un cambio de coordenadas en la parametrización de una superficie S no altera la integral de una función escalar sobre S .

Teorema 9.2. Sean $\Psi : D_\Psi \rightarrow S$ y $\Phi : D_\Phi \rightarrow S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S , y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Entonces

$$\int_{D_\Phi} f(\Phi(u,v)) \|(\Phi_u \times \Phi_v)(u,v)\| du dv = \int_{D_\Psi} f(\Psi(s,t)) \|(\Psi_s \times \Psi_t)(s,t)\| ds dt.$$

Es decir, la integral $\int_S f dS$ definida en 12.11 no depende de la parametrización escogida. En particular, si tomamos $f = 1$, obtenemos que el área de S no depende de la parametrización escogida.

Demostración. Denotemos $(u,v) = \varphi(s,t)$, donde $\varphi = \Phi^{-1} \circ \Psi$ como en el lema 9.1. Se tiene que $\Psi = \Phi \circ \varphi$, y aplicando el teorema del cambio de variables junto con el lema 9.1, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{D_\Phi} f(\Phi(u,v)) \|(\Phi_u \times \Phi_v)(u,v)\| du dv \\ &= \int_{D_\Psi} f(\Phi(\varphi(s,t))) \|(\Phi_u \times \Phi_v)(u(s,t), v(s,t))\| \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right| ds dt \\ &= \int_{D_\Psi} f(\Psi(s,t)) \|(\Psi_s \times \Psi_t)(s,t)\| ds dt. \quad \square\end{aligned}$$

El resultado análogo para campos vectoriales depende del sentido en que apunte la normal unitaria a S , correspondiente a la parametrización en cuestión, como vemos a continuación.

Teorema 9.3. Sean $\Psi : D_\Psi \rightarrow S$ y $\Phi : D_\Phi \rightarrow S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica simple S , denotemos

$$\vec{N}_\Phi = \Phi_u \times \Phi_v \quad \text{y} \quad \vec{N}_\Psi = \Psi_s \times \Psi_t,$$

y sean

$$\vec{n}_\Phi = \frac{1}{\|\vec{N}_\Phi\|} \vec{N}_\Phi, \quad \text{y} \quad \vec{n}_\Psi = \frac{1}{\|\vec{N}_\Psi\|} \vec{N}_\Psi.$$

Entonces, o bien $\vec{n}_\Phi = \vec{n}_\Psi$ para todo $p \in S$, o bien $\vec{n}_\Phi = -\vec{n}_\Psi$ para todo $p \in S$. En el primer caso diremos que las parametrizaciones Φ y Ψ inducen la misma orientación en S , y en el segundo caso diremos que inducen orientaciones opuestas.

Si Φ y Ψ inducen la misma orientación, entonces, para todo campo vectorial continuo $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ se tendrá que

$$\int_{D_\Phi} F(\Phi) \cdot \vec{N}_\Phi \, du \, dv = \int_{D_\Psi} F(\Psi) \cdot \vec{N}_\Psi \, ds \, dt,$$

mientras que si Φ y Ψ inducen orientaciones opuestas en S ,

$$\int_{D_\Phi} F(\Phi) \cdot \vec{N}_\Phi \, du \, dv = - \int_{D_\Psi} F(\Psi) \cdot \vec{N}_\Psi \, ds \, dt.$$

Demostración. Como $\vec{n}_\Phi(p)$ y $\vec{n}_\Psi(p)$ son vectores perpendiculares a TS_p para cada $p \in S$, definen una misma recta; como además, ambos tienen norma uno, se tiene que $\vec{n}_\Phi(p) \cdot \vec{n}_\Psi(p) = 1$, o bien $\vec{n}_\Phi(p) \cdot \vec{n}_\Psi(p) = -1$ para cada $p \in S$. Pero, como las funciones $\vec{n}_\Phi, \vec{n}_\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ son continuas y S es conexa, debe tenerse $\vec{n}_\Phi \cdot \vec{n}_\Psi = 1$ en toda S , o bien $\vec{n}_\Phi \cdot \vec{n}_\Psi = -1$ en toda S . En el primer caso se tiene que $\vec{n}_\Phi(p) = \vec{n}_\Psi(p)$ para todo $p \in S$, y en el segundo caso que $\vec{n}_\Phi(p) = -\vec{n}_\Psi(p)$ para todo $p \in S$. Por otra parte, si recordamos que

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS,$$

el enunciado sobre las integrales es consecuencia inmediata de esta propiedad y del teorema 9.2. \square

Ejemplo 9.6. Sea S el hemisferio norte de la esfera (9.7) (p. 125). Supongamos que \vec{F} es el campo vectorial constante $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, a)$. Encuentre el flujo del campo a través de la superficie.

Solución. De la parametrización Φ para la esfera que se da en (9.7), encontramos que

$$\begin{aligned} \Phi_u &= (-R \operatorname{sen} u \cos v, -R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, R \cos u) \\ \Phi_v &= (-R \cos u \operatorname{sen} v, R \cos u \cos v, 0), \\ \Phi_u \times \Phi_v &= (-R^2 \cos^2 u \cos v, -R^2 \cos^2 u \operatorname{sen} v, -R^2 \operatorname{sen} u \cos u) \\ &= -R^2 \cos u (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u) \end{aligned}$$

Para el campo $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, a)$ ocurre que $\vec{F}(\Phi(u, v)) = (0, 0, a)$. Para el hemisferio norte S de la esfera, debemos tomar $(u, v) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. Entonces, aplicando (9.12) (p. 130), encontramos que el flujo buscado es

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (0, 0, a) \cdot (-R^2 \cos^2 u \cos v, -R^2 \cos^2 u \sin v, -R^2 \sin u \cos u) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} -aR^2 \sin u \cos u du dv = -\pi a R^2. \end{aligned}$$

El signo del flujo depende del signo de a . Así, el flujo es negativo si $a > 0$ porque la normal $\Phi_u \times \Phi_v$ apunta hacia el interior de la semiesfera, mientras que el campo constante, apunta en dirección vertical. \diamond

9.5 La divergencia, el rotacional

Presentamos en esta sección, las definiciones de la divergencia y del rotacional.

9.5.1 La divergencia de un campo vectorial

Dada una superficie orientada S en el espacio y un campo vectorial \vec{F} , la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ se interpreta como un *flujo* (ver observación 9.4, p. 130). El campo \vec{F} se puede ver como el campo de velocidades de un fluido y la superficie S , como una membrana rígida y porosa. En cada punto de la superficie, la componente tangencial de \vec{F} no contribuye a mover el fluido a través de la membrana; solo la componente normal a la superficie es relevante. El elemento vectorial de área $d\vec{S}$ apunta en la dirección perpendicular a la superficie en cada punto, de modo que el producto interior $\vec{F} \cdot d\vec{S}$ es la componente de \vec{F} que es perpendicular a la superficie, multiplicada por el (diferencial de) área dS . Este producto es la rapidez del flujo en cada punto de la superficie. Entonces, la integral $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ es la suma de estas contribuciones sobre todos los puntos de la superficie y, así, es la medida de la rapidez con la que el fluido fluye a través de la superficie.

Consideremos ahora un punto P en el dominio del campo \vec{F} . Tomemos una pequeña región Ω que contenga a P (podría ser un paralelepípedo o una esfera) y sean $V(\Omega)$ y $S = \partial\Omega$ el volumen y la superficie frontera de Ω , respectivamente. Debe ser claro, que tanto el flujo $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ como el volumen $V(\Omega)$, tenderán a cero si Ω “se encoge” sobre P . Sin embargo, el límite de la fracción $\frac{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{V(\Omega)}$ puede existir, y, en este caso, el valor de ese límite, que se puede ver como una *densidad de flujo por volumen*, se define como la *divergencia* del campo \vec{F} .

Definición 9.5. La divergencia de \vec{F} en P , $\text{div } \vec{F}(P)$, se define como la densidad de flujo por volumen

en P

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \lim_{\Omega \rightsquigarrow P} \frac{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{V(\Omega)}, \quad (9.13)$$

donde, “ $\lim_{\Omega \rightsquigarrow P}$ ” significa el límite cuando la vecindad Ω se encoge sobre P .

Ejemplo 9.7. Calcular la divergencia del campo $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$.

Solución. Consideremos una bola Ω de radio r y centro en (x_0, y_0, z_0) . Entonces $V(\Omega) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y la superficie $S = \partial\Omega$ se puede parametrizar (ver p. 125) mediante

$$\Phi(u, v) = (x_0 + r \cos u \cos v, y_0 + r \cos u \sin v, z_0 + r \sin u), \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

El vector normal exterior es

$$N(u, v) = (\Phi_u \times \Phi_v)(u, v) = r^2 \cos u (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u).$$

Como

$$F(\Phi(u, v)) = \left((x_0 + r \cos u \cos v)^2, (y_0 + r \cos u \sin v)^2, (z_0 + r \sin u)^2 \right),$$

encontramos, después de algunas manipulaciones algebraicas y trigonométricas, que

$$\begin{aligned} F(\Phi(u, v)) \cdot N(u, v) &= r^4 \cos u \left(\cos^3 u \cos^3 v - \cos^3 u \cos^2 v \sin v - \cos^3 u \sin u \right. \\ &\quad \left. + \cos^3 u \sin v + \sin u \right) \\ &\quad + 2r^3 \cos u \left(x_0 \cos^2 u \cos^2 v + y_0 (\cos^2 u - \cos^2 u \cos^2 v) + z_0 \sin^2 u \right) \\ &\quad + r^2 \cos u \left(x_0^2 \cos u \cos v + y_0^2 \cos u \sin v + z_0^2 \sin u \right). \end{aligned}$$

Entonces, por el teorema de Fubini,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} F(\Phi(u, v)) \cdot N(u, v) \, du \, dv = \frac{8\pi r^3}{3} (x_0 + y_0 + z_0),$$

por lo que,

$$\frac{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{V(\Omega)} = \frac{\frac{8\pi r^3}{3} (x_0 + y_0 + z_0)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 2(x_0 + y_0 + z_0).$$

Como esta cantidad es independiente de r , concluimos que

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \lim_{\Omega \rightsquigarrow P} 2(x_0 + y_0 + z_0) = 2(x_0 + y_0 + z_0). \quad \diamond$$

9.5.2 La fórmula para la divergencia

Como puede verse, el cálculo de la divergencia de un campo a partir de la definición es muy laborioso y, en general, solo es posible realizarlo en casos especiales. Por eso, es conveniente disponer de una manera más eficiente para calcular la divergencia.

Supongamos que la expresión en coordenadas del campo \vec{F} es

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z) \right).$$

Sea P un punto en el dominio del campo y consideremos una región (pequeña) Ω en forma de paralelepípedo, con centro en P . Sean Δx , Δy y Δz las longitudes de las aristas de Ω paralelas a cada uno de los ejes de coordenadas. Ω tiene seis caras; denotemos con S_1 y S_2 las caras perpendiculares al eje x , con S_3 y S_4 las caras perpendiculares al eje y , y con S_5 y S_6 las caras perpendiculares al eje z . Supongamos, además, que en S_1 , en S_3 y en S_5 los vectores normales exteriores a Ω apuntan en las direcciones positivas de los ejes x , y y z , respectivamente.

Entonces, en este escenario el flujo del campo \vec{F} a través de la superficie S es

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{k=1}^6 \iint_{S_k} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Las seis integrales en el lado derecho son muy sencillas de calcular. Por ejemplo, la superficie S_1 se puede parametrizar como $\Phi^{(1)}(u, v) = (x + \Delta x, u, v)$ con $u \in [y, y + \Delta y]$ y $v \in [z, z + \Delta z]$. Encontramos que $\Phi_u^{(1)} = (0, 1, 0)$ y que $\Phi_v^{(1)} = (0, 0, 1)$, por lo que $\Phi_u^{(1)} \times \Phi_v^{(1)} = (1, 0, 0)$. Entonces

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_z^{z+\Delta z} \int_y^{y+\Delta y} \vec{F}(\Phi^{(1)}(u, v)) \cdot (1, 0, 0) \, du \, dv \\ &= \int_z^{z+\Delta z} \int_y^{y+\Delta y} F_1(x + \Delta x, u, v) \, du \, dv \\ &= F_1(x + \Delta x, u_1, v_1) \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

En la última igualdad se ha usado el teorema del valor intermedio para integrales (ver ejercicio 1.5, p. 21); $(x + \Delta x, u_1, v_1)$ es algún punto en la cara S_1 .

De manera similar, la superficie S_2 (opuesta a S_1) se puede parametrizar como $\Phi^{(2)}(u, v) = (x, u, v)$ con $u \in [y, y + \Delta y]$ y $v \in [z, z + \Delta z]$. Encontramos que $\Phi_u^{(2)} = (0, 0, 1)$ y que $\Phi_v^{(2)} = (0, 1, 0)$, por lo que el vector normal exterior a Ω en S_2 es $\Phi_v^{(2)} \times \Phi_u^{(2)} = (-1, 0, 0)$. Entonces

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -F_1(x, u_2, v_2) \Delta y \Delta z,$$

donde (x, u_2, v_2) es algún punto en la cara S_2 .

Procediendo de igual modo con las otras caras de Ω , encontramos que

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \sum_{k=1}^6 \iint_{S_k} \vec{F} \cdot d\vec{S} \\ &= [F_1(x + \Delta x, u_1, v_1) - F_1(x, u_2, v_2)] \Delta y \Delta z \\ &\quad + [F_2(u_3, y + \Delta y, v_3) - F_2(u_4, y, v_4)] \Delta x \Delta z \\ &\quad + [F_3(u_5, v_5, z + \Delta z) - F_3(u_6, v_6, z)] \Delta x \Delta y, \end{aligned} \quad (9.14)$$

donde $x \leq u_3, u_4, u_5, u_6 \leq x + \Delta x$, $y \leq u_1, u_2, v_5, v_6 \leq y + \Delta y$ y $z \leq v_1, v_2, v_3, v_4 \leq z + \Delta z$.

Por el teorema del valor intermedio para derivadas, tenemos que

$$F_1(x, u_2, v_2) = F_1(x, u_1, v_1) + \beta_1 \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1) + \gamma_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$$

donde

\tilde{u}_1 está entre u_1 y u_2 ,

\tilde{v}_1 está entre v_1 y v_2

$|\beta_1| = |u_2 - u_1| \leq \Delta y$ y

$|\gamma_1| = |v_2 - v_1| \leq \Delta z$.

Se tienen, además, relaciones similares para $F_2(u_4, y, v_4)$ con respecto a $F_2(u_3, y, v_3)$ y para $F_3(u_6, v_6, z)$ con respecto a $F_3(u_5, v_5, z)$. Como $V(\Omega) = \Delta x \Delta y \Delta z$, de (9.14) tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \frac{1}{V(\Omega)} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \left[\frac{F_1(x + \Delta x, u_1, v_1) - F_1(x, u_1, v_1)}{\Delta x} - \frac{\beta_1}{\Delta x} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1) - \frac{\gamma_1}{\Delta x} \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1) \right] \\ &\quad + \left[\frac{F_2(u_3, y + \Delta y, v_3) - F_2(u_3, y, v_3)}{\Delta y} - \frac{\beta_2}{\Delta y} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, \tilde{u}_3, \tilde{v}_3) - \frac{\gamma_2}{\Delta y} \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, \tilde{u}_3, \tilde{v}_3) \right] \\ &\quad + \left[\frac{F_3(u_5, v_5, z + \Delta z) - F_3(u_5, v_5, z)}{\Delta z} - \frac{\beta_3}{\Delta z} \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, \tilde{u}_5, \tilde{v}_5) - \frac{\gamma_3}{\Delta z} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, \tilde{u}_5, \tilde{v}_5) \right], \end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando Ω se encoge sobre P , las primeras fracciones en cada paréntesis cuadrado del lado derecho tienden a $\frac{\partial F_1}{\partial x}(P)$, $\frac{\partial F_2}{\partial y}(P)$ y $\frac{\partial F_3}{\partial z}(P)$, respectivamente, mientras que todos los otros términos se anulan, pues, por ejemplo,

$$0 \leq \frac{\beta_1}{\Delta x} \leq \frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \text{cuando } \Omega \rightsquigarrow P.$$

Así, la divergencia de \vec{F} en P está dada por

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \lim_{\Omega \rightsquigarrow P} \frac{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{V(\Omega)} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right)(P),$$

como se había definido formalmente en (7.3), p. 103.

9.5.3 El rotacional de un campo vectorial

Sea P un punto en el dominio de un campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y sea \vec{n} un vector unitario en P . En el plano que contiene a P y que es perpendicular a \vec{n} , tomemos una curva cerrada γ (pequeña) y denotemos con ΔA el área encerrada por γ . Denotemos con ΔC a la integral de línea (circulación)

$$\Delta C = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Definimos el *rotacional de \vec{F}* en P como el campo vectorial cuya componente en la dirección \vec{n} es el límite, cuando este existe, de $\Delta C/\Delta A$ cuando $\Delta A \rightarrow 0$. Así,

$$(\text{rot } \vec{F})_{\vec{n}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta A}. \quad (9.15)$$

Deduciremos aquí la forma analítica de las componentes del rotacional en las direcciones \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} .

Consideremos primero el caso en el que $\vec{n} = \mathbf{k}$.

Tomemos ejes de coordenadas $x'y'z'$ en P , paralelos a los ejes xyz . Sea γ una curva cerrada simple, pequeña, alrededor de P en el plano $x'y'$. Un punto Q sobre γ tendrá coordenadas $(x', y', 0)$ en el sistema $x'y'z'$ y coordenadas $(x + x', y + y', z)$ en el sistema xyz . Sea

$$\Delta C_z = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} \quad (9.16)$$

la circulación de \vec{F} alrededor de γ , donde $\gamma(t) = (x + x'(t), y + y'(t), z)$. Cuando Q se mueve alrededor de γ , solo x' y y' varían; x, y y z son constantes. Así,

$$d\gamma = dx' \mathbf{i} + dy' \mathbf{j}. \quad (9.17)$$

Sustituyendo (9.17) en (9.16) obtenemos

$$\Delta C_z = \int_{\gamma} F_1(x + x', y + y', z) dx' + F_2(x + x', y + y', z) dy'.$$

Usando el teorema de Taylor expandemos F_1 y F_2 e ignoramos los términos de orden igual o mayor que dos de dx' y dy' . Entonces

$$\Delta C_z = \int_{\gamma} \left(F_1 + x' \frac{\partial F_1}{\partial x} + y' \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx' + \left(F_2 + x' \frac{\partial F_2}{\partial x} + y' \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dy'. \quad (9.18)$$

En (9.18), F_1, F_2 y las derivadas parciales deben evaluarse en $P(x, y, z)$, de modo que son constantes en la integral de línea alrededor de γ . Por tanto,

$$\Delta C_z = F_1 \int_{\gamma} dx' + \frac{\partial F_1}{\partial x} \int_{\gamma} x' dx' + \frac{\partial F_1}{\partial y} \int_{\gamma} y' dx' + \int_{\gamma} F_2 dy' + \frac{\partial F_2}{\partial x} \int_{\gamma} x' dy' + \frac{\partial F_2}{\partial y} \int_{\gamma} y' dy'.$$

Las integrales de línea que aparecen se calculan fácilmente:

$$\int_{\gamma} dx' = x' \Big|_{\gamma} = 0, \quad \text{y también} \quad \int_{\gamma} dy' = 0,$$

$$\int_{\gamma} x' dx' = (x'^2/2) \Big|_{\gamma} = 0, \quad \text{y también} \quad \int_{\gamma} y' dy' = 0,$$

$$\int_{\gamma} y' dx' = -\Delta A_z, \quad \text{donde } \Delta A_z \text{ es el área encerrada por } \gamma,$$

$$\text{similarmente, } \int_{\gamma} x' dy' = \Delta A_z.$$

Usando estos valores, encontramos que

$$\Delta C_z = -\frac{\partial F_1}{\partial y} \Delta A_z + \frac{\partial F_2}{\partial x} \Delta A_z,$$

por lo que

$$\frac{\Delta C_z}{\Delta A_z} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad + \text{ términos de orden superior.}$$

Tomando el límite cuando ΔA_z tiende a 0, encontramos que

$$\lim_{\Delta A_z} \frac{\Delta C_z}{\Delta A_z} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Así que la componente del rotacional de \vec{F} en la dirección \mathbf{k} es

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Mediante un argumento similar encontramos las componentes en las direcciones \mathbf{i} y \mathbf{j} , para concluir que

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

como se había definido en (7.4), p. 104.

Ejercicios

9.1. Calcular el área de las superficies siguientes:

- (a) La parte de la esfera unitaria dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$.
- (b) La parte del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ limitada por el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

9.2. La superficie $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$, con $0 < u \leq R, v \in \mathbb{R}$ es un helicoides. Calcular el área de la porción del helicoides que corresponde a $2 \leq u \leq 4, v \in [0, 2\pi]$.

9.3. Calcular el área de la porción de la esfera correspondiente a $-\pi/2 < u_1 \leq u \leq u_2 < \pi/2$ y concluir que el área de la porción de la esfera comprendida entre dos planos paralelos, depende solo de la distancia entre los planos.

9.4. Calcular el área de la porción de la esfera correspondiente a las coordenadas esféricas $u_0 \leq u \leq u_1$, $v_0 \leq v \leq v_1$ (ver figura 9.8).

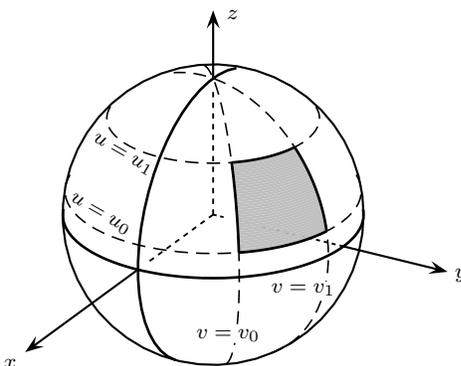


Figura 9.8: La región para el ejercicio 9.4

9.5. En los siguientes casos, calcular la integral de f sobre la superficie S :

(a) $f(x, y, z) = xyz$; S es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 1, 1)$.

(b) $f(x, y, z) = z$; $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9.6. Determinar la masa de una lámina circular de radio R , si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al centro, y vale uno en el borde.

9.7. En los siguientes casos, calcular la integral del campo \vec{F} sobre la superficie S .

(a) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, y)$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1; 0 \leq z \leq 1\}$ orientada con la normal exterior.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$; S es la superficie del tetraedro limitado por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$, orientada con la normal exterior.

(c) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$; $S = \{(x, y, z) : z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2\}$, orientada con la normal exterior.

(d) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, orientada con la normal exterior.

(e) $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2, -2xy, 8)$, la superficie S es la gráfica de $z = 2x - y$ sobre el rectángulo $[0, 2] \times [0, 2]$.

(f) $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, xyz, 0)$, la superficie S es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 1, 1)$.

(g) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, la superficie S es el disco $x^2 + y^2 \leq 25, z = 12$.

9.8. Demostrar que el área de la superficie de revolución en \mathbb{R}^3 , obtenida al girar la gráfica de $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$ (en el plano xz) alrededor del eje z , es

$$2\pi \int_a^b u \sqrt{1 + f'(u)^2} du.$$

Capítulo 10

Cálculo de funciones vectoriales

10.1 El teorema de Green

Para enunciar el teorema de Green es necesario el concepto de curva cerrada simple orientada positivamente. Toda curva simple tiene dos posibles orientaciones que son invariantes por reparametrizaciones cuyas funciones de cambio de variables tienen derivadas positivas. Ahora bien, ¿cómo distinguir entre una y otra orientación? ¿Qué hacer para privilegiar y reconocer una de las dos? Hay varios procedimientos para conseguir esto. Quizá el más intuitivo sea el siguiente, que utiliza el concepto de normal unitaria exterior a una curva.

Si C es una curva cerrada simple regular por pedazos en \mathbb{R}^2 , parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, el vector *normal unitario exterior* a C se define por

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{[\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2]^{1/2}}(\dot{y}(t), -\dot{x}(t)).$$

Nótese que, para cada $t \in I$, el vector $\vec{n}(t)$ se obtiene rotando un ángulo $-\pi/2$ y normalizando el vector tangente $\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ a $\gamma(t)$.

Consideramos a $\vec{n}(t)$ y $\vec{v}(t)$ como vectores en \mathbb{R}^3 (con coordenada $z = 0$). Diremos que C está *orientada positivamente* si el producto vectorial $\vec{n} \times \vec{v}$ (que tiene la dirección del eje z en este caso) tiene coordenada z positiva (es decir, $\vec{n} \times \vec{v}$ “apunta hacia arriba”) para cada t . Esta definición corresponde intuitivamente a decir que C se recorre en el sentido contrario al de las agujas del reloj, o bien que si recorremos C con la orientación positiva, entonces \vec{n} apunta hacia afuera de la región interior a C , y que dicha región interior queda siempre “a mano izquierda” según se va recorriendo C .

Diremos que una curva cerrada simple $C \subset \mathbb{R}^2$ es *regular por pedazos* si se puede parametrizar mediante una curva γ , que a su vez puede escribirse como unión $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ de una cantidad finita de curvas $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^2$, cada una de las cuales es de clase \mathcal{C}^1 y satisface que $\dot{\gamma}_j(t) \neq 0$ para todo $t \in [a_j, b_j]$ (en particular, γ podrá dejar de ser diferenciable en una cantidad finita de puntos, pero incluso en estos tendrá derivadas laterales). Para esta clase de curvas cerradas simples, enunciaremos y demostraremos el teorema de Green.

Teorema 10.1. (de Green) Sea C una curva cerrada simple regular por pedazos, positivamente orientada, en el plano \mathbb{R}^2 ; y sea D la unión de la región interior a C con la propia curva C . Sea $\vec{F} = (P, Q) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 . Entonces se tiene que

$$\int_C P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (10.1)$$

Demostración. Nótese que la validez de (10.1) para todos los campos $\vec{F} = (P, Q)$ de clase \mathcal{C}^1 sobre D equivale a la de las dos fórmulas siguientes

$$-\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D} P dx \quad (10.2)$$

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D} Q dy \quad (10.3)$$

también para todos los campos $\vec{F} = (P, Q)$ de clase \mathcal{C}^1 en D . En efecto, si las fórmulas (10.2) y (10.3) son válidas, obtenemos (10.1) sin más que sumarlas. Recíprocamente, si (10.1) se satisface, podemos obtener (10.2) tomando $Q = 0$ en (10.1), y análogamente (10.3), tomando $P = 0$ en (10.1).

Paso 1. La primera parte de la demostración del teorema de Green consiste en probar (10.2) para una clase especial de regiones D , que denominaremos *regiones tipo I*; una región es de tipo I si está limitada por las gráficas de dos funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$, con $f \leq g$. Es decir, supondremos en primer lugar que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

donde f y g son funciones reales de clase \mathcal{C}^1 por pedazos. Ver figura 10.1.

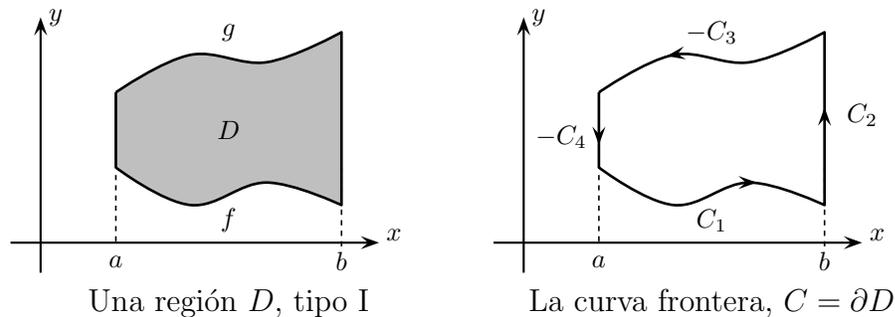


Figura 10.1: Una región tipo I y su frontera

Esta región D está limitada por una curva cerrada simple $C = \partial D$ regular por pedazos que puede expresarse como unión de cuatro curvas regulares por pedazos, $C = C_1 + C_2 - C_3 - C_4$, (como es costumbre, los signos negativos que preceden a una curva denotan que se recorre en sentido opuesto al especificado). Las parametrizaciones de estas cuatro curvas se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
C_1 : \quad \gamma_1(t) &= (t, f(t)), & a \leq t \leq b; \\
C_2 : \quad \gamma_2(t) &= (b, t), & f(b) \leq t \leq g(b); \\
C_3 : \quad \gamma_3(t) &= (t, g(t)), & a \leq t \leq b; \\
C_4 : \quad \gamma_4(t) &= (a, t), & f(a) \leq t \leq g(a).
\end{aligned}$$

Nótese que, a lo largo de C_2 y de C_4 , $x = x(t)$ es constante, luego $dx = 0$ sobre estas curvas, y las correspondientes integrales de línea se anularán, mientras que sobre las restantes curvas es $dx = 1$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} P \, dx &= \int_{C_1} P \, dx + \int_{C_2} P \, dx - \int_{C_3} P \, dx - \int_{C_4} P \, dx \\
&= \int_{C_1} P \, dx - \int_{C_3} P \, dx \\
&= \int_a^b P(t, f(t)) \, dt - \int_a^b P(t, g(t)) \, dt.
\end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned}
-\int_D \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy &= -\int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} \, dy \right] dx = \\
-\int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, f(x))] \, dx &= \int_a^b P(t, f(t)) \, dt - \int_a^b P(t, g(t)) \, dt.
\end{aligned}$$

Combinando las igualdades anteriores obtenemos (10.2).

Paso 2. Ahora probaremos (10.3) para otra clase especial de región D , que denominaremos *región de tipo II*, la limitada por las gráficas de dos funciones $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, con $\varphi \leq \psi$. Es decir, ahora tenemos que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$

con φ, ψ funciones reales de clase \mathcal{C}^1 por pedazos.

Como antes, D está limitado por una curva cerrada simple $C = \partial D$ regular por pedazos que puede expresarse como unión de cuatro curvas regulares por pedazos: $C = -C_1 + C_2 + C_3 - C_4$. Estas curvas pueden parametrizarse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
C_1 : \quad \gamma_1(t) &= (\varphi(t), t), & c \leq t \leq d; \\
C_2 : \quad \gamma_2(t) &= (t, c), & \varphi(c) \leq t \leq \psi(c); \\
C_3 : \quad \gamma_3(t) &= (\psi(t), t), & c \leq t \leq d; \\
C_4 : \quad \gamma_4(t) &= (t, d), & \varphi(d) \leq t \leq \psi(d).
\end{aligned}$$

A lo largo de C_2 y C_4 , $y = y(t)$ es constante, luego $dy = 0$ sobre estas curvas, y las correspondientes integrales de línea son cero; para C_1 y C_3 se tiene $dy = 1$. Entonces,

$$\int_{\partial D} Q \, dy = -\int_{C_1} Q \, dy + \int_{C_2} Q \, dy + \int_{C_3} Q \, dy - \int_{C_4} Q \, dy =$$

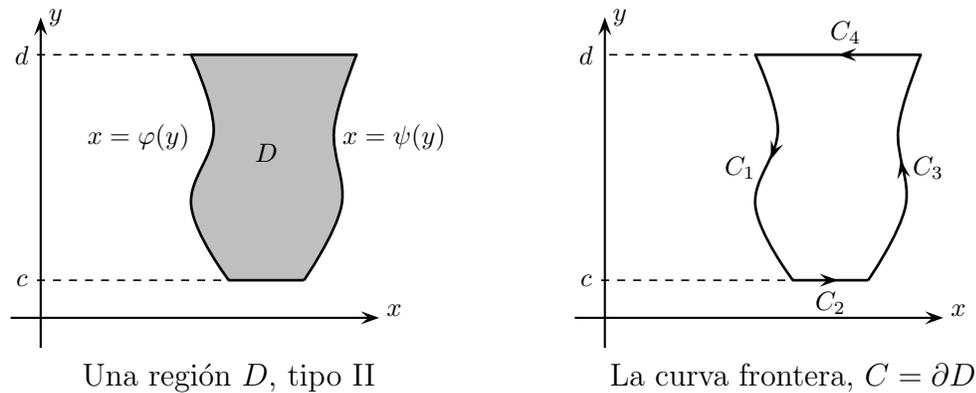


Figura 10.2: Una región tipo II y su frontera

$$-\int_{C_1} Q \, dy + \int_{C_3} Q \, dy = -\int_c^d Q(\varphi(t), t) \, dt + \int_c^d Q(\psi(t), t) \, dt,$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy &= \int_c^d \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} \right] dx \, dy = \\ &= \int_c^d [Q(\psi(y), y) - Q(\varphi(y), y)] \, dy = \int_c^d Q(\psi(t), t) \, dt - \int_c^d Q(\varphi(t), t) \, dt. \end{aligned}$$

De estas dos igualdades se obtiene (10.3).

Paso 3. De acuerdo con la observación que hemos hecho antes y con lo probado en los pasos 1 y 2, la fórmula de Green (10.1) es válida para toda región D que sea a la vez de tipo I y de tipo II. Todos los círculos, los rectángulos y los triángulos constituyen ejemplos de regiones que son de tipo I y II simultáneamente. Por tanto, el teorema de Green es válido para todos estos tipos de curvas. También podría probarse, utilizando el teorema del cambio de variables, que la igualdad (10.1) es cierta para cualquier región D que sea difeomorfa con un círculo, un rectángulo o un triángulo (ejercicio 10.5).

Paso 4. El siguiente paso consiste en establecer la validez de (10.1) para toda región D que pueda descomponerse como unión finita de regiones de tipo I y II. Mas precisamente, demostraremos (10.1) para toda región $D \subset \mathbb{R}^2$ de la forma

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

donde todos los D_i son regiones de tipo I y II simultáneamente, con interiores disjuntos dos a dos, y cuyos bordes, $C_i = \partial D_i$, están positivamente orientados, y de forma que se cumplen:

- (a) si una curva C_i tiene una parte en común con otra curva C_j , entonces esa parte no es común a ningún otro C_k con $k \neq i, j$;

- (b) si C_i tiene un trozo en común con C_j , entonces C_i recorre ese trozo común en sentido contrario al que lo hace C_j ; y
- (c) si C_i tiene un trozo en común con $C = \partial D$, entonces ambas curvas recorren dicho trozo en el mismo sentido (ver figura 10.3).

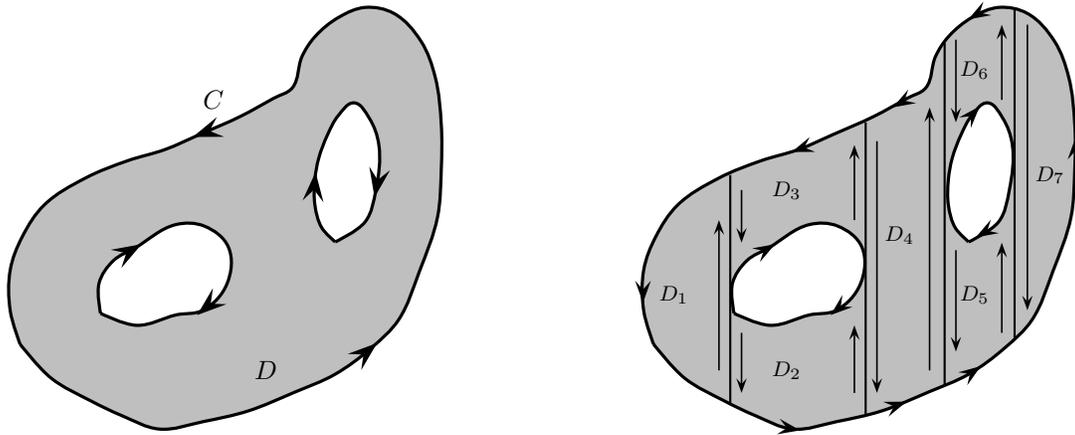


Figura 10.3: Una región D se puede descomponer en una unión finita de regiones tipo I y II

Podemos aplicar la fórmula (10.1) a cada región D_i y sumar todas las igualdades correspondientes para obtener que

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^n \int_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Pero en esta suma de integrales de línea, las integrales sobre $C_i = \partial D_i$ pueden descomponerse a su vez en sumas finitas de integrales sobre curvas simples de dos tipos: o bien son trozos de la curva C_i comunes a algún otro de los C_j , o bien son partes de $C = \partial D$. La suma total de todas las integrales sobre curvas del primero de estos tipos es igual a cero, ya que al integrar y sumar cada una de estas curvas se recorre exactamente dos veces, y con orientaciones opuestas, de modo que la suma de las dos integrales que se hacen sobre cada curva del primer tipo es cero. Por otro lado, la suma de todas las integrales sobre las curvas del segundo tipo es igual a la integral del campo (P, Q) sobre C , ya que C puede expresarse como concatenación de todas las curvas del segundo tipo. Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} P dx + Q dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy,$$

lo que combinado con las igualdades anteriores nos permite concluir que

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

para toda región que pueda descomponerse en una cantidad finita de regiones de tipo I y II simultáneamente. En particular se obtiene que (10.1) es válida para toda curva cerrada simple E que sea poligonal (concatenación finita de segmentos de recta), ya que una tal curva siempre puede triangularse, es decir, puede expresarse como una unión finita

$$E = \bigcup_{i=1}^n T_i,$$

donde los T_i son triángulos (y por tanto, regiones de tipo I y II simultáneamente) orientados de modo que si T_i y T_j tienen un lado común, entonces T_i recorre este lado en sentido contrario a como lo hace T_j . \square

Ejemplo 10.1. Integrar el campo $\vec{F}(x, y) = (x, xy)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo.

Solución. La integral que se pide puede escribirse en la forma $\int_C P dx + Q dy$, donde $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = xy$ y C es la circunferencia parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Por el teorema de Green, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, & (D : \text{disco unitario}) \\ &= \iint_D y dx dy. \end{aligned}$$

En coordenadas polares,

$$\iint_D y dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \sin \theta) r dr d\theta = \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^1 r^2 dr \right) = 0. \quad \diamond$$

Ejemplo 10.2. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula a lo largo de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

Solución. Con $P = y + 3x$, $Q = 2y - x$, C la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ y D la región delimitada por la elipse encontramos, usando el teorema de Green, que

$$\begin{aligned} \text{Trabajo} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C P dx + Q dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-1 - 1) dx dy \\ &= -2 \iint_D dx dy = -2 \times (\text{área de } D) = -2 \times 2\pi = -4\pi \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 10.3. Hallar el valor de la integral $\int_C (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy$, donde C es el borde del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Solución.

$$\begin{aligned} \int_C (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy &= \iint_D [(2x - 2y) + (x + 2y)] dx dy \\ &= 3 \iint_D x dx dy = 3 \int_0^1 \int_0^1 x dx dy = 3 \int_0^1 x dx = \frac{3}{2}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Una aplicación muy importante del teorema de Green es el cálculo de áreas de regiones delimitadas por curvas cerradas simples, mediante una integral de línea sobre el borde de dichas curvas. Si tenemos una región D en el plano cuya frontera es una curva cerrada simple $C = \partial D$ y queremos calcular su área, nos basta hallar un campo vectorial (P, Q) tal que $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1$ y aplicar entonces la fórmula de Green para expresar el área de D como la integral de línea de (P, Q) sobre su borde C . Por ejemplo, podemos tomar $P = -y/2, Q = x/2$, de modo que

$$a(D) = \int_D 1 dx dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

Fórmulas análogas pueden deducirse poniendo $(P, Q) = (-y, 0)$, o bien $(P, Q) = (0, x)$. Obtenemos así el siguiente resultado

Corolario 10.1. *Sea C una curva cerrada simple regular por pedazos, y sea D la región interior a C . Entonces su área es*

$$a(D) = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = - \int_C y dx = \int_C x dy.$$

Ejemplo 10.4. *Hallar el área de la región encerrada por la hipocicloide (astroide) de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.*

Una parametrización de la hipocicloide es

$$x(t) = a \cos^3 t, \quad y(t) = a \sin^3(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= 3a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t) dt \\ &= 3a^2 \cos^2 t \sin^2 t dt. \end{aligned}$$

Entonces

$$a(D) = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2. \quad \diamond$$

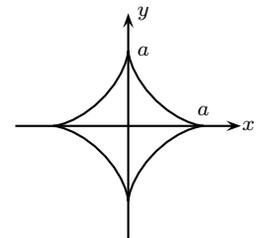


Figura 10.4: El hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Ejercicios

10.1. Utilizar el teorema de Green para calcular $\int_C (y^2 + x^3) dx + x^4 dy$, donde

(a) C es la frontera de $[0, 1] \times [0, 1]$, orientado positivamente.

(b) C es la frontera del cuadrado de vértices (a, b) con $|a| = |b| = 2$, orientado negativamente.

10.2. Calcular $\int_C P dx + Q dy$, donde $P(x, y) = xe^{-y^2}$, $Q(x, y) = -x^2ye^{-y^2} + 1/(x^2 + y^2 + 1)$, y C es la frontera del cuadrado de lado $2a$ determinado por las desigualdades $|x| \leq a$ y $|y| \leq a$, orientado positivamente.

10.3. Usar la expresión para el área encerrada por una curva que proporciona el teorema de Green, para dar otra demostración de la fórmula del área de la región delimitada por una curva en coordenadas polares.

10.4. Calcular el área del trébol de cuatro hojas $\rho = 3 \sin 2\theta$.

10.5. Sea D una región para la cual se sabe que es cierto el teorema de Green. Usar el teorema del cambio de variables para demostrar que el teorema de Green es entonces válido para toda región A que sea difeomorfa a D (es decir, existe un difeomorfismo $g : U \rightarrow V$ de clase C^1 entre dos abiertos U, V de \mathbb{R}^2 que contienen a A y D respectivamente, tal que $g(A) = D$).

10.6. Bajo las mismas hipótesis del teorema de Green, si $\vec{F} = (P, Q)$ y definimos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Comprobar que el teorema de Green se expresa diciendo que

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \int_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy,$$

donde $\vec{F} \cdot \vec{N}$ denota el campo escalar obtenido del producto escalar del campo \vec{F} con el vector normal unitario \vec{N} exterior a C . A esta forma del teorema de Green también se le llama teorema de la divergencia en el plano.

10.7. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, sea C una curva cerrada simple regular por pedazos, sea D la parte interior de C , y supongamos que $D \cup C \subset A$. Sean $u, v \in C^2(A)$. Denotamos:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \operatorname{div}(\nabla u) \\ \nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Sea \vec{N} la normal unitaria exterior en C . Denotamos $\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = \nabla u \cdot \vec{N}$ (producto escalar), la derivada normal de u según C (esto no es más que la derivada direccional de u en la dirección de \vec{N}).

(a) Demostrar las identidades de Green:

$$\int_D v \Delta u + \int_D \nabla u \cdot \nabla v = \int_C v \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} \tag{10.4}$$

$$\int_D (v \Delta u - u \Delta v) = \int_C \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{N}} \right) \tag{10.5}$$

(b) Supongamos ahora que u es armónica en D , es decir, $\Delta u = 0$ en D . Demostrar que si u se anula en C , entonces u es idénticamente nula en D . Deducir también de (a) que si tanto u como v son armónicas en D entonces,

$$\int_C v \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = \int_C u \frac{\partial v}{\partial \vec{N}}.$$

10.2 El teorema de Stokes

Teorema 10.2 (de Stokes). Sea S una superficie orientada, simple y regular a trozos. Sea C su curva frontera, $C = \partial S$, regular a trozos, cerrada y simple, con orientación positiva. Si \vec{F} es un campo vectorial, de clase C^1 en alguna región que contiene a S , entonces

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{N} = \int_{\partial S} \vec{F}. \tag{10.6}$$

Antes de presentar una demostración del teorema de Stokes es conveniente aclarar que la orientación positiva de la curva $C = \partial S$ se determina, informalmente, de la manera siguiente: si una persona recorre la curva C en sentido positivo con la cabeza apuntando al vector normal \vec{N} que indica la orientación de S , la superficie queda a la izquierda. Este convenio es congruente con el concepto de curva plana orientada positivamente, si aceptamos que, en este caso, la superficie es la región interior a la curva.

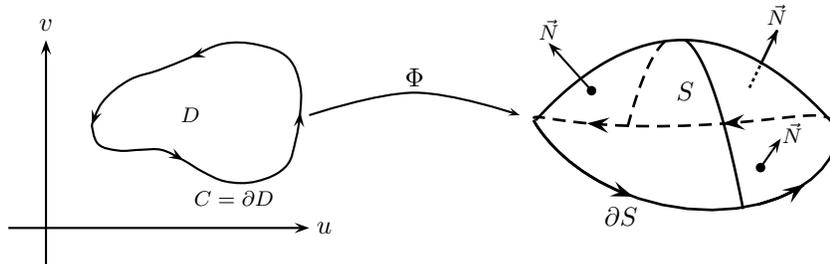


Figura 10.5: Una superficie orientada positivamente

Demostración. Sea $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie, de clase C^1 en un abierto que contiene a $D \cup \partial D$. Supongamos que $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ y que $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Entonces, por definición de integral de línea tenemos

$$\int_{\partial S} \vec{F} = \int_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Por otra parte,

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{N} = \int_S \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Entonces, otra forma de escribir la igualdad (10.6) es

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ = \int_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz, \end{aligned} \quad (10.7)$$

donde $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ denotan, respectivamente,

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Así, por ejemplo,

$$\int_S \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz$$

equivale a escribir

$$\int_S \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(u, v) du dv.$$

En vista de (10.7), bastará probar las tres igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F_1 dx &= \int_S -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \wedge dx, \\ \int_{\partial S} F_2 dy &= \int_S -\frac{\partial F_2}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial F_2}{\partial x} dx \wedge dy, \\ \int_{\partial S} F_3 dz &= \int_S -\frac{\partial F_3}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial F_3}{\partial y} dy \wedge dz, \end{aligned}$$

ya que sumándolas obtenemos (10.7). Probaremos solo la primera de ellas; la demostración de las otras dos es totalmente análoga. Hay que demostrar, pues, que

$$\int_S \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) du dv = \int_{\partial S} F_1 dx. \quad (10.8)$$

Si definimos $f(u, v) = F_1 \circ \Phi(u, v) = F_1(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, entonces se puede comprobar fácilmente que

$$\iint_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx \wedge dy \right] du dv = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(f \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] du dv. \quad (10.9)$$

(De hecho,

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(f \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + f \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - f \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Pero,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(f \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Si aplicamos ahora el teorema de Green al lado derecho de (10.9) obtenemos

$$\iint_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx \wedge dy \right] du dv = \int_C f \frac{\partial x}{\partial u} du + f \frac{\partial x}{\partial v} dv = \int_C F_1 dx. \quad \square$$

Ejemplo 10.5. Sean $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, xyz)$ y $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$. Sea S la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que se encuentra debajo del plano $z = 4$, (ver figura 10.6) orientada de manera tal que el vector normal unitario en el punto $(0, 0, -5)$ es $(0, 0, -1)$. Use el teorema de Stokes para calcular $\int_S \vec{G}$.

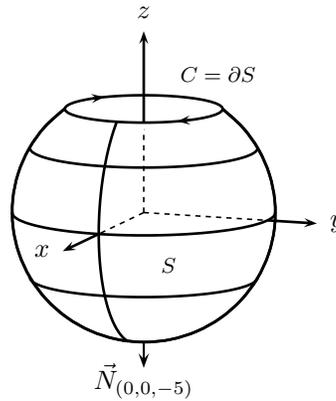


Figura 10.6: la superficie del ejemplo 10.5

Solución. Para aplicar el teorema de Stokes, necesitamos parametrizar la curva frontera $C = \partial S$ de modo que la orientación sea positiva (congruente con la orientación determinada por \vec{N}). Nótese que C es la circunferencia de radio 3, con centro en $(0, 0, 4)$ y contenida en el plano $z = 4$. Entonces una parametrización positiva de C es $\vec{r}(t) = (3 \cos t, -3 \sin t, 4)$, $t \in [0, 2\pi]$. Por el teorema de Stokes, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \int_S \vec{G} &= \int_S \text{rot } \vec{F} = \int_{\partial S} \vec{F} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (3 \sin t, 3 \cos t, -36 \cos t \sin t) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} -9 dt = -18\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 10.6. El plano $z = x + 4$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ se intersectan en una curva C . Supongamos que C , vista desde arriba, está orientada en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + 2y, \sin y + z, x + \sin z^2)$. Evalúe la integral de línea $\int_C \vec{F}$.

Solución. Para aplicar el teorema de Stokes, debemos primero calcular el rotacional de \vec{F} . En este caso encontramos que $\text{rot}\vec{F} = \vec{G} = (-1, -1, -2)$.

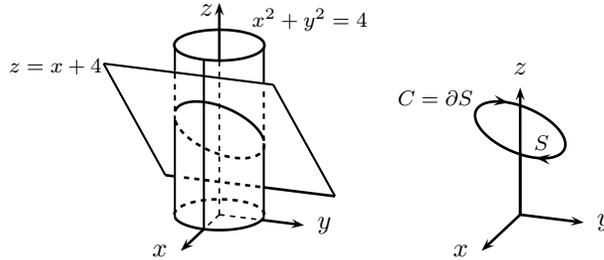


Figura 10.7: La curva C para el ejemplo 10.6

Si para la superficie S escojemos la parametrización $\Phi(u, v) = (u, v, u + 4)$, con $(u, v) \in D$, donde D es el disco $\{u^2 + v^2 < 4\}$, encontramos que $\Phi_u = (1, 0, 1)$, $\Phi_v = (0, 1, 0)$ y $\Phi_u \times \Phi_v = (-1, 0, 1)$. Este vector normal apunta hacia arriba y, por tanto, es congruente con la orientación que se describe para la curva C en el enunciado del problema. Entonces, por el teorema de Stokes tenemos:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} &= \int_S \text{rot}\vec{F} = \int_D \vec{G}(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) \, du \, dv \\ &= \int_D (-1, -1, -2) \cdot (-1, 0, 1) \, du \, dv = - \int_D du \, dv = -(\text{área de } D) = -4\pi. \end{aligned}$$

10.2.1 La banda de Möbius

La famosa *banda de Möbius* es la superficie reglada

$$\Phi(u, v) = \gamma(u) + v\alpha(u), \quad -v_0 \leq v \leq v_0,$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= (r \cos u, r \sin u, 0), \\ \alpha(u) &= \left(\cos \frac{u}{2} \right) \gamma(u) + \left(\sin \frac{u}{2} \right) (0, 0, 1), \\ &0 < u \leq 2\pi. \end{aligned}$$

En este caso, la regla, de longitud $2v_0$, al atravesar la directriz γ , que es la circunferencia de radio r y centro en $(0, 0, 0)$, contenida en el plano xy , da únicamente media vuelta. Para la gráfica que se muestra en la figura 10.8 hemos tomado $r = 2$ y $v_0 = 3/5$.

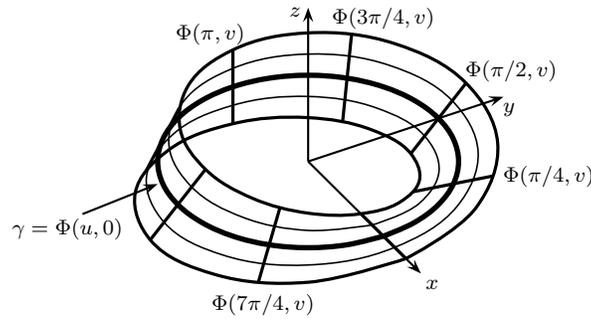


Figura 10.8: La banda de Möbius

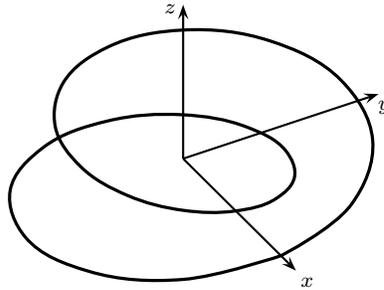


Figura 10.9: La frontera de la banda de Möbius

La curva frontera de la banda de Möbius se obtiene tomando $v = v_0$ y $0 \leq u \leq 4\pi$. Ver figura 10.9. Esto es equivalente a tomar primero $v = v_0$, $0 \leq u \leq 2\pi$ y después $v = -v_0$, $0 \leq u \leq 2\pi$. Así, una parametrización de la frontera de la banda es

$$\vec{r}(t) = \left(r \cos t + rv_0 \cos t \cos \frac{t}{2}, r \sin t + rv_0 \sin t \cos \frac{t}{2}, v_0 \sin \frac{t}{2} \right), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Intentemos verificar el teorema de Stokes en la banda de Möbius. Necesitamos un campo vectorial. Tomemos, por ejemplo, $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$. Este campo vectorial no está definido en el eje z , pero ningún punto de este eje está contenido en la banda. El rotacional de \vec{F} es

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (0, 0, 0),$$

de manera que $\int_S \text{rot} \vec{F} = 0$.

Por otra parte, al calcular la integral de línea $\int_C \vec{F} = \int_0^{4\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$ encontramos que $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 1$ y, por tanto, $\int_C \vec{F} = 4\pi$.

Aparentemente, este ejemplo contradice al teorema de Stokes, pero lo que está ocurriendo es que el teorema no se aplica en el caso de superficies no orientables, y la banda de Möbius es no orientable. De hecho, para simplificar los cálculos, consideremos el comportamiento del vector normal a lo largo de la generatriz $\gamma = \Phi(u, 0) = (r \cos u, r \sin u, 0)$. Sobre la generatriz encontramos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, 0) = (-r \sin u, r \cos u, 0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, 0) = \left(r \cos u \cos \frac{u}{2}, r \sin u \cos \frac{u}{2}, \sin \frac{u}{2} \right).$$

Entonces, el vector normal sobre la generatriz es

$$\vec{N}(u, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, 0) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, 0) = \left(r \sin \frac{u}{2} \cos u, r \sin \frac{u}{2} \sin u, -r^2 \cos \frac{u}{2} \right).$$

De aquí se ve que $\vec{N}(0, 0) = (0, 0, -r^2)$ y que $\vec{N}(2\pi, 0) = (0, 0, r^2)$. Es decir, cuando u cambia de 0 a 2π , el punto sobre la generatriz regresa a su posición inicial, pero el vector normal cambia de signo. Esto significa que sobre la banda de Möbius no se puede definir un campo vectorial normal continuo, y, por eso, la banda de Möbius es una superficie no orientable. Las superficies no orientables son superficies *de una sola cara* y el teorema de Stokes se aplica solo a superficies de dos caras.

10.3 El teorema (de la divergencia) de Gauss

Presentamos ahora el tercero de los teoremas básicos (junto con el de Green y el de Stokes) sobre integración de campos vectoriales.

Iniciaremos considerando el caso en \mathbb{R}^2 .

Consideremos un campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ y sea D una región en el plano. Podemos escribir el teorema de Green en la forma

$$\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} F_1 dy - F_2 dx. \quad (10.10)$$

La integral en el lado izquierdo se puede escribir en la forma $\int_{\partial D} \vec{F} \cdot (dy, -dx)$.

Supongamos que ∂D es una curva cerrada orientada en sentido positivo que parametrizamos como $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Ver figura 10.10.

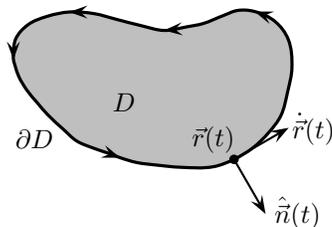


Figura 10.10: La región D y su frontera ∂D

Entonces, tenemos

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot (dy, -dx) = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot (\dot{y}(t), -\dot{x}(t)) dt. \quad (10.11)$$

El lado izquierdo en (10.11) se puede escribir como $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))}{|\dot{\vec{r}}(t)|} |\dot{\vec{r}}(t)| dt$. Nótese que el vector $\frac{(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$ se obtiene rotando el vector tangente unitario a la curva \vec{r} en sentido negativo (es decir, en el sentido del movimiento de las agujas del reloj). Como la región D está a la izquierda de $\dot{\vec{r}}$, concluimos que $\frac{(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$ es un vector unitario normal a ∂D y que apunta hacia fuera de

D . Denotemos a este campo vectorial como $\vec{N}(t)$. Entonces, la forma (10.10) del teorema de Green se puede escribir como

$$\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N}(t) ds(t),$$

o

$$\int_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N}(t) ds(t), \quad (10.12)$$

donde $\vec{N}(t)$ es el campo vectorial normal unitario que apunta al exterior de D y $ds(t) = |\dot{\vec{r}}(t)| dt$ es el elemento escalar de longitud de arco.

La fórmula (10.12) es el *teorema de Gauss* (también conocido como *teorema de la divergencia*) en \mathbb{R}^2 .

Consideremos ahora el caso en \mathbb{R}^3 .

Teorema 10.3. *Sea \vec{F} un campo vectorial continuamente diferenciable en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Sea $\mathcal{R} \subset \Omega$ una región cerrada y acotada cuya frontera es una superficie suave $\mathcal{S} \subset \Omega$. Para cada $x \in \mathcal{S}$ sea $\vec{N}(x)$ el vector normal unitario exterior a \mathcal{S} (con respecto a la región \mathcal{R}). Entonces*

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{x}) dx = \int_{\mathcal{S}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{N}(\vec{x}) dS, \quad (10.13)$$

donde $\vec{x} = (x, y, z)$, $d\vec{x} = dx dy dz$ y dS es el elemento escalar de área.

Demostración. Supongamos que $\vec{F} = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$. Entonces

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) (\vec{x}),$$

por lo que

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial g}{\partial y}(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial h}{\partial z}(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Consideremos la tercera de las integrales que aparecen en el lado derecho.

Supondremos que la superficie \mathcal{S} está formada por una “superficie superior”

$$\mathcal{S}_\tau : \phi(x, y, z) = z - \tau(x, y) = 0,$$

y una “superficie inferior”

$$\mathcal{S}_\rho : \varphi(x, y, z) = z - \rho(x, y) = 0,$$

además de, posiblemente, algunas componentes paralelas al eje z , que denotaremos como \mathcal{S}_z . En un punto $(x, y, \tau(x, y))$ en la superficie superior, el vector normal unitario es

$$\vec{N}_\tau(\vec{x}) = \frac{\left(-\frac{\partial \tau}{\partial x}, -\frac{\partial \tau}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

mientras que en un punto $(x, y, \rho(x, y))$ en la superficie inferior el vector normal unitario es

$$\vec{N}_\rho(\vec{x}) = \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, -1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Sobre la superficie superior, el elemento escalar de área es

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy,$$

mientras que en la superficie inferior, el elemento escalar de área es

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy.$$

Denotemos con \mathcal{R}_{xy} la proyección de \mathcal{R} sobre el plano xy . Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial h}{\partial z}(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_{\mathcal{R}_{xy}} \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\
 &= \int_{\mathcal{R}_{xy}} \left(\int_{z=\rho(x,y)}^{z=\tau(x,y)} \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy \\
 &= \int_{\mathcal{R}_{xy}} [h(x, y, \tau(x, y)) - h(x, y, \rho(x, y))] \, dx \, dy \\
 &= \int_{\mathcal{R}_{xy}} h(x, y, \tau(x, y)) \frac{dS}{\sqrt{\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2 + 1}} \\
 &\quad - \int_{\mathcal{R}_{xy}} h(x, y, \rho(x, y)) \frac{dS}{\sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 + 1}}.
 \end{aligned}$$

Pero es claro que

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{N}_{\tau}(\vec{x})$$

y que

$$\frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{N}_{\rho}(\vec{x})$$

donde $\vec{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$. Así que

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\mathcal{S}_{\tau}} h(x, y, z) \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{N}_{\tau}(\vec{x}) \, dS + \int_{\mathcal{S}_{\rho}} h(x, y, z) \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{N}_{\rho}(\vec{x}) \, dS.$$

Dado que, sobre \mathcal{S}_z se tiene que $\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{N}(\vec{x}) = 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_{\mathcal{S}_{\tau}} h(x, y, z) \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{N}_{\tau}(\vec{x}) \, dS + \int_{\mathcal{S}_{\rho}} h(x, y, z) \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{N}_{\rho}(\vec{x}) \, dS \\
 &\quad + \int_{\mathcal{S}_z} h(x, y, z) \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{N}(\vec{x}) \, dS \\
 &= \int_{\mathcal{S}} h(x, y, z) \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{N}(\vec{x}) \, dS. \tag{10.14}
 \end{aligned}$$

Por la propiedad aditiva de la integral, el resultado anterior puede extenderse a regiones \mathcal{R} que, mediante cortes con planos perpendiculares al eje z , puedan escribirse como uniones finitas de regiones que satisfagan las hipótesis anteriores.

Con hipótesis y argumentos similares se puede probar que

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\mathcal{S}} f(x, y, z) \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{N}(\vec{x}) \, dS, \quad (10.15)$$

y que

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\mathcal{S}} g(x, y, z) \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{N}(\vec{x}) \, dS, \quad (10.16)$$

donde $\vec{\mathbf{i}} = (1, 0, 0)$ y $\vec{\mathbf{j}} = (0, 1, 0)$. Sumando (10.15), (10.16) y (10.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{\mathcal{S}} [f(x, y, z) \vec{\mathbf{i}} + g(x, y, z) \vec{\mathbf{j}} + h(x, y, z) \vec{\mathbf{k}}] \cdot \vec{N}(\vec{x}) \, dS \\ &= \int_{\mathcal{S}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{N}(\vec{x}) \, dS. \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 10.7. *Integración por partes en tres dimensiones.*

Supongamos que \mathcal{S} es una superficie cerrada y que \mathcal{R} es la región interior a \mathcal{S} . Sea $a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial suave. Entonces $a\vec{F}$ también es un campo vectorial suave. Integrando sobre \mathcal{R} la identidad $\operatorname{div}(a(x)\vec{F}(x)) = \nabla a(x) \cdot \vec{F}(x) + a(x)\operatorname{div} \vec{F}(x)$ (ver ejercicio 7.1, p. 106) obtenemos

$$\int_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(a(x)\vec{F}(x)) \, d\vec{x} = \int_{\mathcal{R}} \nabla a(x) \cdot \vec{F}(x) \, d\vec{x} + \int_{\mathcal{R}} a(x)\operatorname{div} \vec{F}(x) \, d\vec{x}.$$

Por el teorema de la divergencia, esta cantidad es igual a $\int_{\mathcal{S}} a\vec{F} \cdot \vec{N} \, dS$. Entonces concluimos que

$$\int_{\mathcal{R}} a(x)\operatorname{div} \vec{F}(x) \, d\vec{x} = \int_{\mathcal{S}} a\vec{F} \cdot \vec{N} \, dS - \int_{\mathcal{R}} \nabla a(x) \cdot \vec{F}(x) \, d\vec{x}.$$

Esta es la versión tridimensional de la fórmula de integración por partes, y puede generalizarse a cualquier dimensión. Es un resultado muy importante en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales. \diamond

Ejercicios

10.8. *Repetir el ejercicio 9.7, usando los teoremas de Stokes o Gauss en los casos en que resulte más conveniente.*

10.9. Consideramos las superficies

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}, \\ S_2 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\} \quad y \\ S &= S_1 \cup S_2. \end{aligned}$$

Sea el campo $F(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3xy + y, z^2x^2)$. Calcular $\int_S \operatorname{rot} F$.

10.10. Demostrar que si S es una superficie sin borde (por ejemplo, una esfera o un toro en \mathbb{R}^3), entonces $\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS = 0$ para todo campo vectorial \vec{F} de clase C^1 en S .

10.11. Utilizar el teorema de la divergencia para calcular $\int_S F$, donde $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$, y

$$S = \{x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1, z = -1\}.$$

10.12. Consideramos $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2 - 3x + 1$, $F(x, y, z) = (e^{-xy} + z, z \operatorname{sen} y, x^2 - z^2 + y^2)$, y sea $V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2 \geq 4z - 3\}$. Calcular $\int_{\partial V} \nabla f + \operatorname{rot} F$.

10.13. Sean

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0\}, \\ S &= \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}, \end{aligned}$$

y sea C el borde de S .

(a) Calcular el área de S .

(b) Calcular el volumen de V .

(c) Calcular $\int_C F$, donde $F(x, y, z) = (1 - 2z, 0, 2y)$.

10.14. Sea $B(t)$ una bola de radio $t > 0$ con centro en un punto $a \in \mathbb{R}^3$, y sea $S(t)$ la esfera correspondiente. Sea $F : B(1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 , y sea $\mathbf{n} = \mathbf{n}_t$ la normal unitaria exterior a $S(t)$. Probar que

$$\operatorname{div} F(a) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{v(B(t))} \int_{S(t)} F \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

10.15. En los siguientes ejercicios, $\partial f / \partial \mathbf{n}$ denota la derivada direccional de un campo escalar f en la dirección de la normal unitaria exterior \mathbf{n} a una superficie orientable S que limita un sólido V al que se puede aplicar el teorema de la divergencia. Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}.$$

En cada uno de los ejercicios demostrar la igualdad indicada, suponiendo la continuidad de todas las derivadas que intervienen:

$$(a) \int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_V \nabla^2 f dx dy dz;$$

$$(b) \int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS = 0 \text{ si } f \text{ es armónica en } V \text{ (es decir si } \nabla^2 f = \operatorname{div} \nabla f = 0 \text{)}.$$

$$(c) \int_S f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_V f \nabla^2 g dx dy dz + \int_V \nabla f \cdot \nabla g dx dy dz.$$

$$(d) \int_S \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy dz.$$

$$(e) \int_S f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_S g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS \text{ si } f \text{ es armónica en } V.$$

10.16. Sea V un sólido convexo de \mathbb{R}^3 cuya frontera es una superficie cerrada S y sea \mathbf{n} la normal unitaria exterior a S . Sean \vec{F} y G dos campos vectoriales de clase C^1 tales que

$$\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} G, \quad \text{y} \quad \operatorname{div} F = \operatorname{div} G$$

en V , y que cumplen $F \cdot \mathbf{n} = G \cdot \mathbf{n}$ en S . Demostrar que $F = G$ en V .

Sugerencia: sea $H = F - G$; encontrar una función de potencial f para H y usar una de las igualdades del ejercicio anterior para ver que $\int_V \|\nabla f\|^2 dx dy dz = 0$.

Bibliografía

- [1] <http://www.mat.ucm.es/~dazagrar/>
- [2] Curtis, P.C. Jr. (1976). *Cálculo de varias variables con álgebra lineal*. México: Limusa.
- [3] Edwards, C.H. Jr. (1973). *Advanced calculus of several variables*. Nueva York: Dover Publications Inc.
- [4] Edwards, C.H. Jr. y Penney, D.E. (1996). *Cálculo con geometría analítica*. (4ta. ed.). Madrid: Prentice Hall.
- [5] Fraga, R. (ed.). (1999). *Calculus problems for a new century*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- [6] Kreyszig, E. (2003). *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (vol. 1). (3ra. ed.). México: Editorial Limusa.
- [7] Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. (7a. ed.). México: Oxford.
- [8] Marsden, J.E. y Tromba A.I. (2004). *Cálculo vectorial*. (5ta. ed.). Madrid: Addison Wesley.
- [9] Mc Callum, W.G., Gleason, A.M. y Hughes-Hallett, D. (1998). *Cálculo de varias variables*. México: CECSA.
- [10] Munkres, J.R. (1991). *Analysis on manifolds*. Advanced Book Classics. Boca Ratón, FL: CRC Press Taylor & Francis Group.
- [11] Peng, L., & Yang, L. (1999). *The curl in seven dimensional space and its applications*. Approx. Theory & its Appl., 15(3), 66-80.
- [12] Schey, H.M. (1997). *Div, grad, curl and all that: An informal text on vector calculus*. (4ta. ed.). Nueva York: W.W. Norton Company.
- [13] Solow, A. (ed.). (1999). *Learning by discovery*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- [14] Stewart, J. (2002). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*. (4ta. ed.) Nueva York: W.W. Norton Company.

- [15] Swokowsky, E. (1989). *Cálculo con geometría analítica*. (2da. ed.). México: Grupo Editorial Iberoamérica.